不等式的证明：

一、比较法：比较法是证明不等式的最基本、最重要的方法，它常用的证明方法有两种：

1．作差比较法

方法：欲证 A>B,只需要证 A-B>0

步骤：“作差----变形----判断符号”。

使用此法作差后主要变形形式的处理：

〇将差变形为常数或一个常数与几个平方和的形式常用配方法或实数特征 a2≥0 判断差的符号。

〇将差变形为几个因式的积的形式，常用因式分解法。

〇若变形后得到二次三项式，常用判别式定符号。

总之，变形的目的是有利于判断式子的符号，而变形方法不限定，也就是说，关键是变形的目标。

2．作商比较法

方法：要证 A>B,常分以下三种情况：

若 B>0，只需证明 $\frac{A}{B}>1$；

若 B=0，只需证明 A>0;

若 B<0，只需证明 $\frac{A}{B}<1$。

（3）步骤：“作商-----变形-----判断商数与 1 的大小”

例：已知 a, b, m 都是正数，并且 $a<b$，求证：$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$

解析：用作差比较法

$$\because \frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}=\frac{b(a+m)-a(b+m)}{b(b+m)}=\frac{m(b-a)}{b(b+m)}$$

$\because a,b,m$ 都是正数，并且 $a<b$，$\therefore b+m>0$， $b-a>0$

$\therefore \frac{m(b-a)}{b(b+m)}>0$ 即：$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$

例：已知 a>b>0,求证：$a^a b^b>\left(ab\right)^{\frac{a+b}{2}}$

解析：用作商比较法

$$\because \frac{a^a b^b}{\left(ab\right)^{\frac{a+b}{2}}}=a^{a-\frac{a+b}{2}}b^{b-\frac{a+b}{2}}=a^{\frac{a-b}{2}}b^{-\frac{a-b}{2}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}}$$

又∵a>b>0, $\therefore \frac{a}{b}>1,\frac{a-b}{2}>0\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}}>1$

$\therefore a^a b^b>\left(ab\right)^{\frac{a+b}{2}}$

例：已知 0 < x < 1, 0 < a < 1，试比较 $|\log_a(1-x)|$ 和 $|\log_a(1+x)|$ 的大小。

解析：法 1：用作差比较法

$$|\log_a(1-x)|^2-|\log_a(1+x)|^2=\left[\log_a(1-x)+\log_a(1-x)\right]\left[\log_a(1-x)-\log_a(1+x)\right]$$

$$=\log_a(1-x^2)\log_a\frac{1-x}{1+x}$$

$\because 0<1-x^2<1,\quad 0<\frac{1-x}{1+x}<1 \qquad \therefore \log_a(1-x^2)\log_a\frac{1-x}{1+x}>0$

$\therefore |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$

法 2：用作商比较法

$$\left|\frac{\log_a(1-x)}{\log_a(1+x)}\right|=\left|\log_{1+x}(1-x)\right|=-\log_{1+x}(1-x)=\log_{1+x}\frac{1}{1-x}=\log_{1+x}\frac{1+x}{1-x^2}$$

$$=1-\log_{1+x}(1-x^2)$$

$\because 0<1-x^2<1,\quad 1+x>1,\quad \therefore -\log_{1+x}(1-x^2)>0$

$\therefore 1-\log_{1+x}(1-x^2)>1 \qquad \therefore |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$

二、综合法：用综合法证明不等式，就是利用已知事实(已知条件、重要不等式或已证明的不等式)作为基础，借助不等式的性质和有关定理，经过逐步的逻辑推理，最后推出所要证

明的不等式，其特点和思路是“由因导果”，从“已知”看“可知”，逐步推出“结论”综合法属逻辑方法范畴，它的严谨体现在步步注明推理依据。常用的不等式有：

（1）$a^2+b^2\ge 2ab\left(\text{当且仅当}a=b\text{时取等号}\right)$

（2）$\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\left(a,b\in R^{+}\text{当且仅当}a=b\text{时取等号}\right)$

（3）$a^2\ge 0$

（4）$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\ge 2\left(a,b\text{同号}\right)$

例：若 a、b、c 是不全相等的正数，

求证：$\lg\dfrac{a+b}{2}+\lg\dfrac{b+c}{2}+\lg\dfrac{c+a}{2}>\lg a+\lg b+\lg c$

解析：根据本题的条件及要证明的结论，可用综合法证明。

$\because a,b,c\in R^{+},$

$\therefore\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}>0,\dfrac{b+c}{2}\ge\sqrt{bc}>0,$

$\dfrac{c+a}{2}\ge\sqrt{ac}>0.$

又 a,b,c,为不全相等的正数，故有

$\dfrac{a+b}{2}\bullet\dfrac{b+c}{2}\bullet\dfrac{c+a}{2}>abc$

$\therefore\lg\left(\dfrac{a+b}{2}\bullet\dfrac{b+c}{2}\bullet\dfrac{c+a}{2}\right)>\lg abc$

即$\lg\dfrac{a+b}{2}+\lg\dfrac{b+c}{2}+\lg\dfrac{c+a}{2}>\lg a+\lg b+\lg c$

例 6： 已 知 $a,b,c\in R^{+}$,

求 证：$\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\ge a+b+c$

解析：左式含有分母，右式为整式，故应设法化去左式的分母，考虑用综合法。

$\because a,b,c\in R^{+},\therefore\dfrac{a^2}{b}+b\ge 2\sqrt{\dfrac{a^2}{b}\bullet b}=2a$

同理$\dfrac{b^2}{c}+c\ge 2b,\dfrac{c^2}{a}+a\ge 2c$

三式相加有　　　　　　　　　　　　：

$\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}+a+b+c\ge 2\left(a+b+c\right)$

即$\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\ge a+b+c.$得证

三、分析法：分析法是指从需证的不等式出发，分析这个不等式成立的充分条件，进而转

化为判定那个条件是否具备，其特点和思路是“执果索因”，即从“未知”看“需知”，逐步靠拢“已知”。分析法一般用于综合法难以证明的不等式。

分析法属逻辑方法范畴，它的严谨体现在分析过程步步可逆。

例：若 0<a<c,,b<c,求证：

$$c-\sqrt{c^2-ab}<a-c<\sqrt{c^2-ab}$$

解析：原不等式形式复杂，不宜直接由一端过渡到另一端，故可作等价变形，用分析法证明。要证

$$c-\sqrt{c^2-ab}<a-c<\sqrt{c^2-ab}$$

只要证

$$-\sqrt{c^2-ab}<a-c<\sqrt{c^2-ab}$$

即$\left|a-c\right|<\sqrt{c^2-ab}$

$$\left(a-c\right)^2<c^2-ab$$

也即 a^2-2ac<-ab

∵a>0,∴只要证 a+b<2c

由题设条件，显然有 a+b<2c 成立。

所以，原不等式成立。

注：有些不等式的证明，需要一边分析一边综合，称之为综合分析法。

四、反证法：可以从正难则反的角度考虑，即要证明不等式$A>B$，先假设$A\le B$，由题设及其它性质，推出矛盾，从而肯定$A>B$。凡涉及到的证明不等式为否定命题、惟一性命题或含有“至多”、“至少”、“不存在”、“不可能”等词语时，可以考虑用反证法。

例：已知 a>0,b>0,且 a+b>2 求证：$\dfrac{1+b}{a},\dfrac{1+a}{b}$,中至少有一个小于2。

解析：由于题目结论是：至少有一个小于 2，情况较复杂，讨论起来比较繁，宜采用反证法。

假设$\dfrac{1+b}{a},\dfrac{1+a}{b}$都不小于2，则$\dfrac{1+b}{a}\ge 2,\dfrac{1+a}{b}\ge 2.$

∵ a>0,b>0,∴1+b⩾2a,1+a⩾2b,

两式相加可得 1+b+1+a⩾2（a+b）

即 a+b⩽2,这与已知 a+b>2 矛盾。故假设不成立

因此：$\dfrac{1+b}{a},\dfrac{1+a}{b}$,中至少有一个小于2。

五：换元法：换元法是将所证的不等式的字母作适当的代换，以达到简化证题的目的方法。它主要有两种换元形式：

(1)三角换元法：多用于条件不等式的证明，当所给条件较复杂，一个变量不易用另一个变量表示，这时可考虑三角代换，将两个变量都有同一个参数表示。此法如果运用恰当，可沟通三角与代数的联系，将复杂的代数问题转化为三角问题根据具体问题，

(2)增量换元法：在对称式(任意交换两个字母，代数式不变)和给定字母顺序(如$a>b>c$等)的不等式，考虑用增量法进行换元，其目的是通过换元达到减元，使问题化难为易，化繁为简。

例：若$x^2+y^2\le 1$，求证：$|x^2+2xy-y^2|\le\sqrt{2}$

解析：由 x2+y2≤1，联想到三角函数的性质，考虑用三角换元法。

设 $x = r\sin\alpha,\quad y = r\cos\alpha,\quad (0 \le r \le 1)$，

则 $|x^2 + 2xy - y^2| = |r^2\cos^2\alpha + 2r^2\cos\alpha\sin\alpha - r^2\sin^2\alpha|$

$$= r^2|\cos 2\alpha + \sin 2\alpha| \le \sqrt{2}r^2\left|\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right| \le \sqrt{2}r^2 \le \sqrt{2}$$

例：已知 a>0，b>0，且 $a+b=1$。求证：$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b}) \geqslant \frac{25}{4}$。

解析：证法一：(三角换元法)

∵ a>0，b>0，$a+b=1$，故令 $a=\sin^2\alpha$，$b=\cos^2\alpha$，$\alpha \in (0,\frac{\pi}{2})$

$$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b}) = (\sin^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha})(\cos^2\alpha + \frac{1}{\cos^2\alpha})$$
$$= \frac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 2}{4\sin^2 2\alpha} = \frac{(4-\sin^2\alpha)^2 + 16}{4\sin^2 2\alpha}$$
$$\because \sin^2 2\alpha \le 1, \therefore 4 - \sin^2 2\alpha \ge 4 - 1 = 3. \qquad 2$$
$$\left.\begin{array}{l} 4 - 2\sin^2 2\alpha + 16 \ge 25 \\ \dfrac{1}{\sin^2 2\alpha} \ge \dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(4-\sin^2 2\alpha)^2}{4\sin^2 2\alpha} \ge \frac{25}{4}$$
即得 $(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b}) \ge \frac{25}{4}.$

证法二：(增量换元法)

设 $a=\frac{1}{2}+t_1$，$b=\frac{1}{2}+t_2$。

∵$a+b=1$，a>0，b>0，∴$t_1+t_2=0$，$|t_1|<\frac{1}{2}$，$|t_2|<\frac{1}{2}$

$$\therefore (a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b}) = \frac{a^2+1}{a} \times \frac{b^2+1}{b}$$
$$= \frac{(\frac{1}{2}+t_1)^2+1}{\frac{1}{2}+t_1} \times \frac{(\frac{1}{2}+t_2)^2+1}{\frac{1}{2}+t_2} = \frac{(\frac{1}{4}+t_1+t_1^2+1)(\frac{1}{4}+t_2+t_2^2+1)}{(\frac{1}{2}+t_1)(\frac{1}{2}+t_2)}$$
$$= \frac{(\frac{1}{4}+t_1+t_1^2+1)(\frac{1}{4}+t_2+t_2^2+1)}{\frac{1}{4}-t_2^2} = \frac{(\frac{5}{4}+t_2^2)^2 - t_2^2}{\frac{1}{4}-t_2^2}$$
$$= \frac{\frac{25}{16}+\frac{3}{2}t_2^2+t_2^4}{\frac{1}{4}-t_2^2} \ge \frac{\frac{25}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{25}{4}.$$

显然当且仅当 $t=0$，即 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，等号成立。

说明：形如 a+b=1 结构式的条件，一般都可以采用换元法。换元时，新的变量的变化范围必须保证原来的变量的变化范围不发生变化。

六：放缩法：要证明不等式 A < B 成立，借助一个或多个中间变量通过适当的放大或缩小达到证明不等式的方法。

放缩法证明不等式的理论依据主要有：(1)不等式的传递性；(2)等量加不等量为不等量；(3)同分子(分母)异分母(分子)的两个分式大小的比较。

常用的放缩技巧有：①舍掉(或加进)一些项；②在分式中放大或缩小分子或分母；③应用均值不等式进行放缩。

例：求证：$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2$

解析：舍掉(或加进)一些项进行放缩。

$\because \frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$

$\therefore \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}<2$

【变式】 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{7}{4}$

$\because \frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$

$\therefore \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{2^2}+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=\frac{5}{4}+(\frac{1}{2}-\frac{1}{n})<\frac{7}{4}$

说明：本题采用了从第三项开始拆项放缩的技巧，放缩拆项时，不一定从第一项开始，须根据具体题型分别对待，即放不能太宽、缩不能太窄，真正做到恰到好处。

例：若 a，b，c，d 是正数．

求证：$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+d}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}<2$

解析：运用放大、缩小分母或分子的办法来进行放缩

$\because \frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+d}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}$

$>\frac{a}{a+b+c+d}+\frac{b}{a+b+c+d}+\frac{c}{a+b+c+d}+\frac{d}{a+b+c+d}=1$

又 $\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+d}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{c+d}=2$

或 $\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+d}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}$

$<\frac{a+b}{a+b+c+d}+\frac{b+c}{a+b+c+d}+\frac{a+c}{a+b+c+d}+\frac{b+d}{a+b+c+d}=2$

（利用$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}(m>0)$）

$\therefore 1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+d}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}<2$

说明：分式的放缩对于分子分母均取正值的分式，如需放大，则只要把分子放大或分母缩小即可；如需缩小，则只要把分子缩小或分母放大即可．还可利用真分数的分子和分母加上同一个正数，则分数值变大；假分数的分子和分母加上同一个正数，则分数值变小来进行放缩．

例：若$n\in N^*$，求证：$\sqrt{1\times 2}+\sqrt{2\times 3}+\ldots+\sqrt{n\times(n+1)}<\frac{(n+1)^2}{2}$

解析：根据题目的特点考虑应用均值不等式进行放缩。

$\because \sqrt{n\times(n+1)}<\frac{n+n+1}{2}=\frac{2n+1}{2}$

$\therefore$

$$\sqrt{1\times 2}+\sqrt{2\times 3}+\ldots+\sqrt{n\times(n+1)}<\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\ldots+\frac{2n+1}{2}=\frac{\frac{n(3+2n+1)}{2}}{2}=\frac{n(n+2)}{2}=\frac{n^2+2n}{2}<\frac{(n+1)^2}{2}$$

例：当$n>2$时，求证：$\log_n(n-1)\cdot\log_n(n+1)<1$

解析：$\because n>2$，$\therefore \log_n(n-1)>0,\log_n(n+1)>0$，且$\log_n(n-1)\neq\log_n(n+1)$，

$\therefore$

$$\log_n(n-1)\cdot\log_n(n+1)<[\frac{\log_n(n-1)+\log_n(n+1)}{2}]^2=[\frac{\log_n(n^2-1)}{2}]^2<[\frac{\log_n n^2}{2}]^2=1,$$

$\therefore n>2$时，$\log_n(n-1)\cdot\log_n(n+1)<1$.

放缩法是不等式证明中一种常用的方法，也是一种非常重要的方法。在证明过程中，适当地进行放缩，可以化繁为简、化难为易，达到事半功倍的效果。但放缩的范围较难把握，常常出现放缩之后得不出结论或得出相反结论的现象。因此，使用放缩法时，如何确定放缩目标尤为重要。要想正确确定放缩目标，就必须根据欲证结论，抓住题目的特点。掌握放缩技巧，真正做到弄懂弄通，并且还要根据不同题目的类型，采用恰到好处的放缩方法，才能把题解活，从而培养和提高自己的思维和逻辑推理能力，分析问题和解决问题的能力。

七：构造法：在不等式的证明中，可根据不等式的结构特点，恰当的构造一个与不等式相关的数学模型，如构造函数、方程、数列、向量等，实现问题的转化，从而使不等式得到证明。

例： 已知x，y，$z\in\mathbf{R}$，且$x+y+z=1$，$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}$，

求证：x，y，$z\in$［0，$\frac{2}{3}$］

解析：根据题目的特点考虑构造方程求解。

由$x+y+z=1$，$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}$，得$x^2+y^2+(1-x-y)^2=\frac{1}{2}$，

整理成关于 y 的一元二次方程得：

$$2y^2-2(1-x)y+2x^2-2x+\frac{1}{2}=0,$$

$\because y\in\mathbf{R}$，故 $\Delta\geqslant 0$

$\therefore 4(1-x)^2-4\times 2(2x^2-2x+\frac{1}{2})\geqslant 0$，得 $0\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}$，$\therefore x\in[0,\ \frac{2}{3}]$

同理可得 y，$z\in[0,\ \frac{2}{3}]$

（此法也称判别式法）

例：已知 $0<a<1$，$0<b<1$，

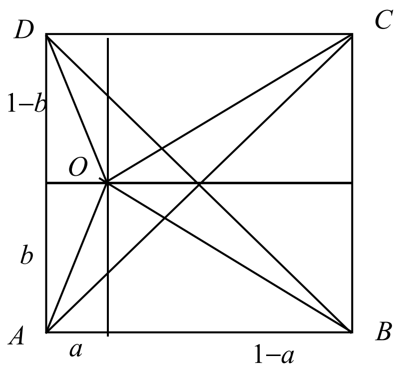
求证：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-1)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(b-1)^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}\geq 2\sqrt{2}$

解析：根据题目的结构特点钩造几何图形证明。

构造单位正方形，O 是正方形内一点

O 到 AD, AB 的距离为 a, b，

则$|AO|+|BO|+|CO|+|DO|\geqslant|AC|+|BD|$



其中$|AO|=\sqrt{a^2+b^2}$，

$|BO|=\sqrt{(a-1)^2+b^2}$

$|CO|=\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}$

$|DO|=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$

又：$|AC|=|BD|=\sqrt{2}$

$$\therefore\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-1)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(b-1)^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}\geq 2\sqrt{2}$$

八：数学归纳法法：当不等式是一个与自然数 n 有关的命题， 可以利用数学归纳法进行证明。

例：证明不等式$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}\ (n\in\mathbf{N}^*)$

解析：本题是一个与自然数 n 有关的命题，可以考虑应用数学归纳法证明。

(1)当 n 等于 1 时，不等式左端等于 1，右端等于 2，所以不等式成立；

(2)假设 $n=k(k\geqslant 1)$时，不等式成立，即 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}$，

$$\text{则}1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$
$$=\frac{2\sqrt{k(k+1)}+1}{\sqrt{k+1}}<\frac{k+(k+1)+1}{\sqrt{k+1}}=2\sqrt{k+1},$$

∴当 $n=k+1$ 时，不等式成立。

综合(1)、(2)得：当 $n\in\mathbf{N}^*$时，都有 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$。

另从 k 到 $k+1$ 时的证明还有下列证法：

$$\because 2(k+1)-1-2\sqrt{k(k+1)}=k-2\sqrt{k(k+1)}+(k+1)$$
$$=(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})^2>0,$$
$$\therefore 2\sqrt{k(k+1)}+1<2(k+1),$$
$$\because \sqrt{k+1}>0, \therefore 2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}.$$

又如：$\because 2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}=\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}>\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k+1}},$

$$\therefore 2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}.$$

不等式的证明一题多解:

例： 已知 $a, b, c, d\in\mathrm{R}$, 求证: $ac+bd\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$

分析一:用分析法

证法一:(1)当 $ac+bd\leqslant 0$ 时,显然成立。

(2)当 $ac+bd>0$ 时,欲证原不等式成立,

只需证 $(ac+bd)^2\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

即证 $a^2c^2+2abcd+b^2d^2\leqslant a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$

即证 $2abcd\leqslant b^2c^2+a^2d^2$

即证 $0\leqslant(bc-ad)^2$

因为 $a, b, c, d\in\mathrm{R}$,所以上式恒成立,

综合(1)、(2)可知:原不等式成立。

分析二:用综合法

证法二:$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=(a^2c^2+2abcd+b^2d^2)+(b^2c^2-2abcd+a^2d^2)$

$=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2\geqslant(ac+bd)^2$

∴ $\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\geqslant|ac+bd|\geqslant ac+bd$。

故命题得证。

分析三:用比较法

证法三:∵ $(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2=(bc-ad)^2\geqslant 0$,

∴ $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$

$\therefore \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \geqslant |ac+bd| \geqslant ac+bd,$

即 $ac+bd \leqslant \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$.

证法四：（换元法）

设 $a^2+b^2=r_1^2$，$c^2+d^2=r_2^2$

则可设 $a=r_1\cos\alpha$，$b=r_1\sin\alpha$，$c=r_2\cos\beta$，$d=r_2\sin\beta$

$\therefore ac+bd=r_1r_2\cos\alpha\cos\beta+r_1r_2\sin\alpha\sin\beta$

$=r_1r_2\cos(\alpha-\beta) \le r_1r_2=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$

例：若 $a>0$，$b>0$，$a^3+b^3=2$．求证 $a+b\leqslant 2$，$ab\leqslant 1$．

分析：由条件 $a^3+b^3=2$ 及待证的结论 $a+b\leqslant 2$ 的结构入手，联想它们之间的内在联系，不妨用作差比较法或均值不等式或构造方程等等方法，架起沟通二者的“桥梁”.

证法一 (作差比较法)

因为 $a>0$，$b>0$，$a^3+b^3=2$，所以

$(a+b)^3-2^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2-8=3a^2b+3ab^2-6$

$=3[ab(a+b)-2]=3[ab(a+b)-(a^3+b^3)]=-3(a+b)(a-b)^2\leqslant 0$，

即 $(a+b)^3\leqslant 23$．

又 $a+b>0$，所以 $a+b\leqslant 2$．因为 $2\sqrt{ab}\leqslant a+b\leqslant 2$，所以 $ab\leqslant 1$.

证法二 (平均值不等式—综合法)

因为 $a>0$，$b>0$，$a^3+b^3=2$，所以

$$2=a^3+b^3\geqslant 2\sqrt{a^3b^3}，故 ab\leqslant 1.$$

又 $a+b=a\cdot 1\cdot 1\cdot 1+b\cdot 1\cdot 1=\sqrt[3]{a^3\cdot 1\cdot 1}+\sqrt[3]{b^3\cdot 1\cdot 1}$

$$\leqslant \frac{a^3+1+1}{3}+\frac{b^3+1+1}{3}=\frac{a^3+b^3+4}{3}=\frac{6}{3}=2,$$

所以 $a+b\leqslant 2$，$ab\leqslant 1$．

说明：充分发挥“1”的作用，使其证明路径显得格外简捷、漂亮.

证法三 (构造方程)

设 a，b 为方程 x2-mx+n=0 的两根．则

$$\begin{cases} m=a+b, \\ n=ab. \end{cases}$$

因为 $a>0$，$b>0$，所以 $m>0$，$n>0$ 且 Δ=m2-4n$\geqslant$0．①

因此 2=a3+b3=(a+b)(a2-ab+b2)=(a+b)[(a+b)2-3ab]=m[m2-3n]，所以

$$n=\frac{m^2}{3}-\frac{2}{3m}. \qquad ②$$

将②代入①得 $m^2-4(\frac{m^2}{3}-\frac{2}{3m})\geqslant 0$，即 $\frac{-m^3+8}{3m}\geqslant 0$，所以 -m3+8$\geqslant$0，即 $m\leqslant 2$，

所以 $a+b\leqslant 2$．

由 2$\geqslant$m 得 4$\geqslant$m2，又 m2$\geqslant$4n，所以 4$\geqslant$4n，即 $n\leqslant 1$．所以 $ab\leqslant 1$．

说明：认真观察不等式的结构，从中发现与已学知识的内在联系，就能较顺利地找到解决问题的切入点.

证法四　(恰当的配凑)

因为 $a>0$，$b>0$，$a^3+b^3=2$，所以

$$2=a^3+b^3=(a+b)(a2+b2-ab)\geqslant(a+b)(2ab-ab)=ab(a+b),$$

于是有 $6\geqslant3ab(a+b)$，从而

$$8\geqslant3ab(a+b)+2=3a2b+3ab2+a3+b3=(a+b)3,$$

所以 $a+b\leqslant2$．(以下略)

证法五（利用公式 $\frac{a^3+b^3}{2}\geqslant(\frac{a+b}{2})^3$，因为

$$\frac{a^3+b^3}{2}-(\frac{a+b}{2})^2=\frac{(a+b)[4a^2+4b^2-4ab-a^2-b^2-2ab]}{8}$$

$$=\frac{3(a+b)(a-b)^2}{8}\geqslant0,$$

所以对任意非负实数a，b有 $\frac{a^3+b^3}{2}\geqslant(\frac{a+b}{2})^3$.

因为 $a>0,b>0,a^3+b^3=2$,所以 $1=\frac{a^3+b^3}{2}\geqslant(\frac{a+b}{2})^3$,因此 $\frac{a+b}{2}\leqslant1$,

即 $a+b\leqslant2$．(以下略)

证法六　(反证法)

假设 $a+b>2$，则

$$a^3+b^3=(a+b)(a2-ab+b2)=(a+b)[(a+b)^2-3ab]>2(22-3ab).$$

因为 $a^3+b^3=2$，所以 $2>2(4-3ab)$，因此 $ab>1$．　①

另一方面，$2=a^3+b^3=(a+b)(a2+b2-ab)\geqslant(a+b)(2ab-ab)=(a+b)\cdot ab>2ab$，

所以 $ab<1$．　②

于是①与②矛盾，故 $a+b\leqslant2$．(以下略)

说明：此题用了六种不同的方法证明，这几种证法都是证明不等式的常用方法．

例：已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$。求证：$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\geq\frac{25}{4}$.

证法一：(分析综合法)

欲证原式，即证 $4(ab)^2+4(a^2+b^2)-25ab+4\geq0$，即证 $4(ab)^2-33(ab)+8\geq0$，

即证 $ab\leq\frac{1}{4}$ 或 $ab\geq8$.

$\because a>0$，$b>0$，$a+b=1$，$\therefore ab\geq8$ 不可能成立

$\because 1=a+b\geq2\sqrt{ab}$，$\therefore ab\leq\frac{1}{4}$，从而得证.

证法二：(均值代换法)

设 $a=\frac{1}{2}+t_1$，$b=\frac{1}{2}+t_2$.

$\because a+b=1$，$a>0$，$b>0$，$\therefore t_1+t_2=0$，$|t_1|<\frac{1}{2}$，$|t_2|<\frac{1}{2}$

$$\therefore (a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=\frac{a^2+1}{a}\times\frac{b^2+1}{b}$$

$$=\frac{(\frac{1}{2}+t_1)^2+1}{\frac{1}{2}+t_1}\times\frac{(\frac{1}{2}+t_2)^2+1}{\frac{1}{2}+t_2}=\frac{(\frac{1}{4}+t_1+t_1{}^2+1)(\frac{1}{4}+t_2+t_2{}^2+1)}{(\frac{1}{2}+t_1)(\frac{1}{2}+t_2)}$$

$$=\frac{(\frac{1}{4}+t_1+t_1{}^2+1)(\frac{1}{4}+t_2+t_2{}^2+1)}{\frac{1}{4}-t_2{}^2}=\frac{(\frac{5}{4}+t_2{}^2)^2-t_2{}^2}{\frac{1}{4}-t_2{}^2}$$

$$=\frac{\frac{25}{16}+\frac{3}{2}t_2{}^2+t_2{}^4}{\frac{1}{4}-t_2{}^2}\ge\frac{\frac{25}{16}}{\frac{1}{4}}=\frac{25}{4}.$$

显然当且仅当 t=0，即 a=b=$\frac{1}{2}$时，等号成立.

证法三：(比较法）

∵a+b=1，a＞0，b＞0，∴a+b≥2$\sqrt{ab}$，∴ab≤$\frac{1}{4}$

$$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})-\frac{25}{4}=\frac{a^2+1}{a}\cdot\frac{b^2+1}{b}-\frac{25}{4}=\frac{4a^2b^2+33ab+8}{4ab}=\frac{(1-4ab)(8-ab)}{4ab}\ge 0$$

$$\therefore (a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\ge\frac{25}{4}$$

证法四：(综合法)

∵a+b=1， a＞0，b＞0，∴a+b≥2$\sqrt{ab}$，∴ab≤$\frac{1}{4}$.

$$\therefore 1-ab\ge 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\Rightarrow(1-ab)^2\ge\frac{9}{16}\Rightarrow\left.\begin{cases}(1-ab)^2+1\ge\frac{25}{16}\\ \frac{1}{ab}\ge 4\end{cases}\right\}\Rightarrow\frac{(1-ab)^2+1}{ab}\ge\frac{25}{4}$$

即$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\ge\frac{25}{4}$

证法五：(三角代换法）

∵ a＞0，b＞0，a+b=1，故令 a=$\sin^2\alpha$，b=$\cos^2\alpha$，α∈(0，$\frac{\pi}{2}$)

$$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=(\sin^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha})(\cos^2\alpha+\frac{1}{\cos^2\alpha})$$

$$=\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+2}{4\sin^2 2\alpha}=\frac{(4-\sin^2\alpha)^2+16}{4\sin^2 2\alpha}$$

$\because \sin^2 2\alpha\le 1, \therefore 4-\sin^2 2\alpha\ge 4-1=3.$ 2

$$\left.\begin{array}{l} 4-2\sin^2 2\alpha+16\ge 25 \\ \dfrac{1}{\sin^2 2\alpha}\ge\dfrac{1}{4} \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{(4-\sin^2 2\alpha)^2}{4\sin^2 2\alpha}\ge\frac{25}{4}$$

即得$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\ge\frac{25}{4}$.