

20 种排列组合问题的具体方法技巧

排列组合问题联系实际生动有趣，但题型多样，思路灵活，但只要掌握【排列组合题目的总体原则与方法】，再加上下面要学习这些具体的方法技巧，就可以做到以不变应万变，搞定所有排列组合题目！

说明

1. 根据出题频率，确定【重点方法】为一、二、三、十、十一、十五、十九，这几个方法请重点学习、熟练掌握，其他方法可先做了解，做题过程中发现有需要，且时间充裕，再来强化。
2. 由于这些方法比较零碎，且图文已能较清晰地表达，所以暂时不开发视频课程，有任何问题请留言、联系我。

复习巩固

基础知识：

1、排列组合

(1) 排列数

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

(2) 组合数

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{P_m^m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m(m-1)\dots 2 \times 1}$$

2、计数原理

(1) 分类计数原理(加法原理)

完成一件事，有 n 类办法，在第 1 类办法中有 m_1 种不同的方法，在第 2 类办法中有 m_2 种不同的方法， \dots ，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有： $N = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ 种不同的方法。

(2) 分步计数原理(乘法原理)

完成一件事，需要分成 n 个步骤，做第 1 步有 m_1 种不同的方法，做第 2 步有 m_2 种不同的方法， \dots ，做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有： $N = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$ 种不同的方法。

(3) 分类计数原理分步计数原理区别

分类计数原理方法相互独立，任何一种方法都可以独立地完成这件事。

分步计数原理各步相互依存，每步中的方法完成事件的一个阶段，不能完成整个事件。

排列组合题目的总体原则与方法(一般过程)如下：

1. 做什么：

认真审题弄清要做什么事，用具体个例帮助理解

2. 怎样做：

怎样做才能完成所要做的事，即采取分步还是分类，或是分步与分类同时进行，确定分多少步及多少类；下面要学习的具体方法技巧可帮助你如何去完成具体某件事。

3. 如何计算：

分步相乘，分类相加；确定每一步或每一类是排列问题(有序)还是组合(无序)问题，元素总数是多少及取出多少个元素，用排列数与组合数帮助计算。

一. 特殊元素和特殊位置优先策略

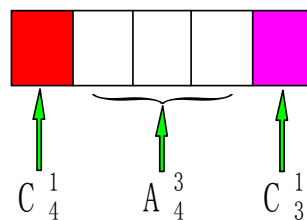
例 1. 由 0, 1, 2, 3, 4, 5 可以组成多少个没有重复数字五位奇数。

解：由于末位和首位有特殊要求，应该优先安排，以免不合要求的元素占了这两个位置。

先排末位，从 1, 3, 5 三个数中任选一个共有 C_3^1 种排法；

然后排首位，从 2, 4 和剩余的两个奇数中任选一个共有 C_4^1 种排法；

最后排中间三个数，从剩余四个数中任选 3 个的排列数共有 A_4^3 种排法；



\therefore 由分步计数原理得 $C_4^1 C_3^1 A_4^3 = 288$

练习题:

7 种不同的花种在排成一列的花盆里,若两种葵花不种在中间,也不种在两端的花盆里,问有多少不同的种法?

解:先种两种不同的葵花在不受限制的四个花盆中共有 A_4^2 不同种法,再其它葵花有 A_5^5 不同种法,所以共有不同种法 $A_4^2 A_5^5 = 12 \times 120 = 1440$ 种不同的种法.

二. 相邻元素捆绑策略

例 2. 7 人站成一排,其中甲乙相邻且丙丁相邻,共有多少种不同的排法.

解:可先将甲乙两元素捆绑成整体并看成一个复合元素,同时丙丁也看成一个复合元素,再与其它元素进行排列,同时对相邻元素内部进行自排.由分步计数原理可得共有 $A_5^5 A_2^2 A_2^2 = 480$ 种不同的排法.



练习题:

某人射击 8 枪,命中 4 枪,4 枪命中恰好有 3 枪连在一起的情形不同种数为 20

解:命中的三枪捆绑成一枪,与命中的另一枪插入未命中的四枪的空位,共有 $A_5^2 = 20$ 种不同的情形.

三. 不相邻问题插空策略

例 3. 一晚会的节目有 4 个舞蹈,2 个相声,3 个独唱,舞蹈节目不能连续出场,则节目的出场顺序有多少种?

解:分两步进行第一步排 2 个相声和 3 个独唱共有 A_5^5 种,第二步将 4 舞蹈插入第一步排好的 6 个元素中间包含首尾两个空位共有 A_6^4 不同的方法,由分步计数原理,节目的不同顺序共有 $A_5^5 A_6^4$

练习题:

某班新年联欢会原定的 5 个节目已排成节目单,开演前又增加了两个新节目.如果将这两个新节目插入原节目单中,且两个新节目不相邻,那么不同插法的种数为 30

四. 定序问题倍缩空位插入策略

例 4. 7 人排队,其中甲乙丙 3 人顺序一定共有多少不同的排法

解:(倍缩法)对于某几个元素顺序一定的排列问题,可先把这几个元素与其他元素一起进行排列,然后用总

排列数除以这几个元素之间的全排列数,则共有不同排法种数是: $\frac{A_7^7}{A_3^3}$

(空位法)设想有 7 把椅子让除甲乙丙以外的四人就坐共有 A_7^4 种方法,其余的三个位置甲乙丙共有 1

种坐法,则共有 A_7^4 种方法.(七个空位坐了四人,剩下 3 个空位按一定顺序坐下甲,乙,丙)

思考:可以先让甲乙丙就坐吗?

(插入法)先排甲乙丙三个人,共有 1 种排法,再把其余 4 人依次插入共有 $C_7^3 A_4^4$ 方法.(先选三个座位坐

下甲,乙,丙共有 C_7^3 种选法,余下四个空位排其它四人共有 A_4^4 种排法,所以共有 $C_7^3 A_4^4$ 种方法.)

练习题:

10 人身高各不相等,排成前后排,每排 5 人,要求从左至右身高逐渐增加,共有多少排法? C_{10}^5

五. 重排问题求幂策略

例 5. 把 6 名实习生分配到 7 个车间实习,共有多少种不同的分法

解:完成此事共分六步:把第一名实习生分配到车间有 7 种分法.把第二名实习生分配到车间也有 7 种分法依此类推,由分步计数原理共有 7^6 种不同的排法

练习题:

1. 某班新年联欢会原定的 5 个节目已排成节目单,开演前又增加了两个新节目.如果将这两个节目插入原节目单中,那么不同插法的种数为 42

2. 某 8 层大楼一楼电梯上来 8 名乘客,他们到各自的一层下电梯,下电梯的方法 7^8

六. 环排问题直排策略

如果在圆周上 m 个不同的位置编上不同的号码,那么从 n 个不同的元素的中选取 m 个不同的元素排

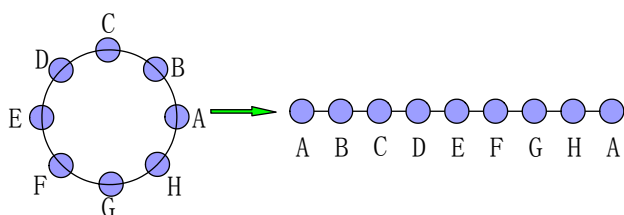
在圆周上不同的位置，这种排列和直线排列是相同的；如果从 n 个不同的元素中选取 m 个不同的元素排列在圆周上，位置没有编号，元素间的相对位置没有改变，不计顺逆方向，这种排列和直线排列是不同的，这就是环形排列的问题。一个 m 个元素的环形排列，相当于一个有 m 个顶点的多边形，沿相邻两个点的弧线剪断，再拉直就是形成一个直线排列，即一个 m 个元素的环形排列对应着 m 个直线排列，设从 n 个元素中取出 m 个元素组成的环形排列数为 N 个，则对应的直线排列数为 mN 个，又因为从 n 个元素中取出 m 个元素的排成一排的排列数为 A_n^m 个，所以 $mN = A_n^m$ ，所以 $N = \frac{A_n^m}{m}$ 。

即从 n 个元素中取出 m 个元素组成的环形排列数为 $N = \frac{A_n^m}{m}$ 。

n 个元素的环形排列数为 $N = \frac{A_n^n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$

例 6. 8 人围桌而坐，共有多少种坐法？

解：围桌而坐与坐成一排的不同点在于，坐成圆形没有首尾之分，所以固定一人 A_4 并从此位置把圆形展成直线其余 7 人共有 $(8-1)! = 7!$ 种排法，即 $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 840$ 种



练习题：6 颗颜色不同的钻石，可穿成几种钻石圈 120

七. 多排问题直排策略

例 7. 8 人排成前后两排，每排 4 人，其中甲乙在前排，丙在后排，共有多少排法

解：8 人排前后两排，相当于 8 人坐 8 把椅子，可以把椅子排成一排。先排前 4 个位置，2 个特殊元素有 A_4^2 种排法，再排后 4 个位置上的特殊元素丙有 A_4^1 种，其余的 5 人在 5 个位置上任意排列有 A_5^5 种，则共有 $A_4^2 A_4^1 A_5^5$ 种排法。（排好后，按前 4 个为前排，后 4 人为后排分成两排即可）

练习题：有两排座位，前排 11 个座位，后排 12 个座位，现安排 2 人就座规定前排中间的 3 个座位不能坐，并且这 2 人不左右相邻，那么不同排法的种数是 346

解：由于甲乙二人不能相邻，所以前排第 1, 4, 8, 11 四个位置和后排第 1, 12 位置是排甲乙中的一个时，与它相邻的位置只能排除一个，而其它位置要排除 3 个，所以共有排列 $C_6^1 C_{18}^1 + C_{14}^1 C_{17}^1 = 108 + 238 = 346$

八. 排列组合混合问题先选后排策略

例 8. 有 5 个不同的小球，装入 4 个不同的盒内，每盒至少装一个球，共有多少不同的装法。

解：第一步从 5 个球中选出 2 个组成复合元共有 C_5^2 种方法。再把 4 个元素（包含一个复合元素）装入 4 个不同的盒内有 A_4^4 种方法，根据分步计数原理装球的方法共有 $C_5^2 A_4^4$

练习题：一个班有 6 名战士，其中正副班长各 1 人现从中选 4 人完成四种不同的任务，每人完成一种任务，且正副班长有且只有 1 人参加，则不同的选法有 192 种

九. 小集团问题先整体后局部策略

例 9. 用 1, 2, 3, 4, 5 组成没有重复数字的五位数其中恰有两个偶数在 1, 5 在两个奇数之间，这样的五位数有多少个？（注：两个偶数 2, 4 在两个奇数 1, 5 之间，这是题意，说这个结构不能被打破，故 3 只能排这个结构的外围，也就是说要把这个结构看成一个整体与 3 进行排列）。

解：把 1, 5, 2, 4 当作一个小集团与 3 排队共有 A_2^2 种排法，再排小集团内部共有 $A_2^2 A_2^2$ 种排法，由分步计数原理共有 $A_2^2 A_2^2 A_2^2$ 种排法。

练习题：

1. 计划展出 10 幅不同的画，其中 1 幅水彩画，4 幅油画，5 幅国画，排成一行陈列，要求同一品种的必须连在一起，并且水彩画不在两端，那么共有陈列方式的种数为 $A_2^2 A_5^5 A_4^4$

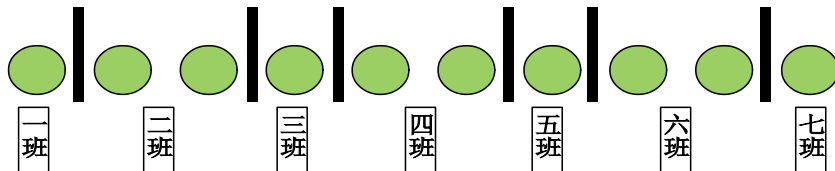
2. 5 男生和 5 女生站成一排照像，男生相邻，女生也相邻的排法有 $A_2^2 A_5^5 A_5^5$ 种

十. 元素相同问题隔板策略

例 10. 有 10 个运动员名额, 分给 7 个班, 每班至少一个, 有多少种分配方案?

解: 因为 10 个名额没有差别, 把它们排成一排. 相邻名额之间形成 9 个空隙. 在 9 个空档中选 6 个位置插个隔板, 可把名额分成 7 份, 对应地分给 7 个班级, 每一种插板方法对应一种分法共有 C_9^6 种分法.

注: 这和投信问题是不同的, 投信问题的关键是信不同, 邮筒也不同, 而这里的问题是邮筒不同, 但信是相同的. 即班级不同, 但名额都是一样的.



练习题:

10 个相同的球装 5 个盒中, 每盒至少一有多少装法? C_9^4

2. $x + y + z + w = 100$ 求这个方程组的自然数解的组数 C_{103}^3

十一. 正难则反总体淘汰策略 (间接法)

例 11. 从 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 这十个数字中取出三个数, 使其和为不小于 10 的偶数, 不同的取法有多少种?

解: 这问题中如果直接求不小于 10 的偶数很困难, 可用总体淘汰法. 这十个数字中有 5 个偶数 5 个奇数, 所取的三个数含有 3 个偶数的取法有 C_5^3 , 只含有 1 个偶数的取法有 $C_5^1 C_5^2$, 和为偶数的取法共有 $C_5^1 C_5^2 + C_5^3$. 再淘汰和小于 10 的偶数共 9 种, 符合条件的取法共有 $C_5^1 C_5^2 + C_5^3 - 9$

练习题: 我们班里有 43 位同学, 从中任抽 5 人, 正、副班长、团支部书记至少有一人在内的抽法有多少种?

十二. 平均分组问题除法策略

例 12. 6 本不同的书平均分成 3 堆, 每堆 2 本共有多少分法?

解: 分三步取书得 $C_6^2 C_4^2 C_2^2$ 种方法, 但这里出现重复计数的现象, 不妨记 6 本书为 ABCDEF, 若第一步取 AB, 第二步取 CD, 第三步取 EF 该分法记为 (AB, CD, EF), 则 $C_6^2 C_4^2 C_2^2$ 中还有 (AB, EF, CD), (CD, AB, EF), (CD, EF, AB) (EF, CD, AB), (EF, AB, CD) 共有 A_3^3 种取法, 而这些分法仅是 (AB, CD, EF) 一种分法, 故共有 $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3}$ 种分法.

平均分成的组, 不管它们的顺序如何, 都是一种情况, 所以分组后要一定要除以 A_n^n (n 为均分的组数) 避免重复计数。

练习题:

1 将 13 个球队分成 3 组, 一组 5 个队, 其它两组 4 个队, 有多少分法? ($\frac{C_{13}^5 C_8^4 C_4^4}{A_2^2}$)

2. 10 名学生分成 3 组, 其中一组 4 人, 另两组 3 人但正副班长不能分在同一组, 有多少种不同的分组方法 (1540)

3. 某校高二年级共有六个班级, 现从外地转入 4 名学生, 要安排到该年级的两个班级且每班安排 2 名, 则不同的安排方案种数为 _____ ($\frac{C_4^2 C_2^2 A_6^2}{A_2^2} = 90$)

十三. 合理分类与分步策略

例 13. 在一次演唱会上共 10 名演员, 其中 8 人能唱歌, 5 人会跳舞, 现要演出一个 2 人唱歌 2 人伴舞的节

目,有多少选派方法

解: 10 演员中有 5 人只会唱歌, 2 人只会跳舞 3 人为全能演员. 选上唱歌人员为标准进行研究
只会唱的 5 人中没有人选上唱歌人员共有 $C_3^2 C_3^2$ 种, 只会唱的 5 人中只有 1 人选上唱歌人员
 $C_5^1 C_3^1 C_4^2$ 种, 只会唱的 5 人中只有 2 人选上唱歌人员有 $C_5^2 C_3^2$ 种, 由分类计数原理共有
 $C_3^2 C_3^2 + C_5^1 C_3^1 C_4^2 + C_5^2 C_3^2$ 种.

解含有约束条件的排列组合问题, 可按元素的性质进行分类, 按事件发生的连续过程分步, 做到标准明确. 分步层次清楚, 不重不漏, 分类标准一旦确定要贯穿于解题过程的始终.

本题还有如下分类标准:

⊗ 以 3 个全能演员是否选上唱歌人员为标准; ⊗ 以 3 个全能演员是否选上跳舞人员为标准;

⊗ 以只会跳舞的 2 人是否选上跳舞人员为标准; 都可经得到正确结果

练习题:

1. 从 4 名男生和 3 名女生中选出 4 人参加某个座谈会, 若这 4 人中必须既有男生又有女生, 则不同的选法共有 34
2. 3 成人 2 小孩乘船游玩, 1 号船最多乘 3 人, 2 号船最多乘 2 人, 3 号船只能乘 1 人, 他们任选 2 只船或 3 只船, 但小孩不能单独乘一只船, 这 3 人共有多少乘船方法. (27)

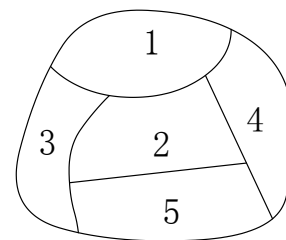
十四. 构造模型策略

例 14. 马路上有编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 的九只路灯, 现要关掉其中的 3 盏, 但不能关掉相邻的 2 盏或 3 盏, 也不能关掉两端的 2 盏, 求满足条件的关灯方法有多少种?

解: 把此问题当作一个排队模型在 6 盏亮灯的 5 个空隙中插入 3 个不亮的灯有 C_5^3 种

一些不易理解的排列组合题如果能转化为非常熟悉的模型, 如占位填空模型, 排队模型, 装盒模型等, 可使问题直观解决

练习题: 某排共有 10 个座位, 若 4 人就坐, 每人左右两边都有空位, 那么不同的坐法有多少种? (120)



十五. 实际操作穷举策略

例 15. 设有编号 1, 2, 3, 4, 5 的五个球和编号 1, 2, 3, 4, 5 的五个盒子, 现将 5 个球投入这五个盒子内, 要求每个盒子放一个球, 并且恰好有两个球的编号与盒子的编号相同, 有多少投法

解: 从 5 个球中取出 2 个与盒子对号有 C_5^2 种还剩下 3 球 3 盒序号不能对应, 利用实际操作法, 如果剩下 3, 4, 5 号球, 3, 4, 5 号盒, 3 号球只能装入 4 号或 5 号盒, 共两种装法, 当 3 号球装 4 号盒时, 则 4, 5 号球只有 1 种装法, 同理 3 号球装 5 号盒时, 4, 5 号球有也只有 1 种装法, 由分步计数原理有 $2C_5^2$ 种.

练习题:

1. 同一寝室 4 人, 每人写一张贺年卡集中起来, 然后每人各拿一张别人的贺年卡, 则四张贺年卡不同的分配方式有多少种? (9)
2. 给图中区域涂色, 要求相邻区域不同色, 现有 4 种可选颜色, 则不同的着色方法有 72 种

十六. 分解与合成策略

例 16. 30030 能被多少个不同的偶数整除

分析: 先把 30030 分解成质因数的乘积形式 $30030=2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$

依题意可知偶因数必先取 2, 再从其余 5 个因数中任取若干个组成乘积,

所有的偶因数为: $C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$

练习: 正方体的 8 个顶点可连成多少对异面直线. (是连成异面直线, 所以包括对角线)

解: 我们先从 8 个顶点中任取 4 个顶点构成四面体共有 $C_8^4 - 12 = 58$, 每个四面体有

3对异面直线, 正方体中的8个顶点可连成 $3 \times 58 = 174$ 对异面直线

分解与合成策略是排列组合问题的一种最基本的解题策略, 把一个复杂问题分解成几个小问题逐一解决, 然后依据问题分解后的结构, 用分类计数原理和分步计数原理将问题合成, 从而得到问题的答案, 每个比较复杂的问题都要用到这种解题策略

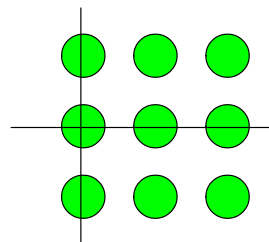
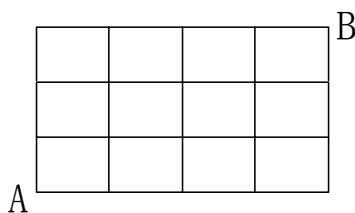
十七. 化归策略

例 17. 25 人排成 5×5 方阵, 现从中选 3 人, 要求 3 人不在同一行也不在同一列, 不同的选法有多少种?

解: 将这个问题退化成 9 人排成 3×3 方阵, 现从中选 3 人, 要求 3 人不在同一行也不在同一列, 有多少选法. 这样每行必有 1 人从其中的一行中选取 1 人后, 把这人所在的行列都划掉, 如此继续下去. 从 3×3 方队中选 3 人的方法有 $C_3^1 C_2^1 C_1^1$ 种. 再从 5×5 方阵选出 3×3 方阵便可解决问题. 从 5×5 方队中选取 3 行 3 列有 $C_5^3 C_5^3$ 选法所以从 5×5 方阵选不在同一行也不在同一列的 3 人有

$C_5^3 C_5^3 C_3^1 C_2^1 C_1^1$ 选法. **从 3×3 方阵中任取 3 个人时, 因这三人不在同一行同一列,**

所以每行必有一人, 据此, 从每行任了



练习题: 某城市的街区由 12 个全等的矩形区组成, 其中实线表示马路,

从 A 走到 B 的最短路径有多少种? ($C_7^3 = 35$)

十八. 数字排序问题查字典策略

例 18. 由 0, 1, 2, 3, 4, 5 六个数字可以组成多少个没有重复的比 324105 大的数?

解: $N = 2A_5^5 + 2A_4^4 + A_3^3 + A_2^2 + A_1^1 = 297$

数字排序问题可用查字典法, 查字典的法应从高位向低位查, 依次求出其符合要求的个数, 根据分类计数原理求出其总数.

练习: 用 0, 1, 2, 3, 4, 5 这六个数字组成没有重复的四位偶数, 将这些数字从小到大排列起来, 第 71 个数是 3140

十九. 树图策略

例 19. 3 人相互传球, 由甲开始发球, 并作为第一次传球, 经过 5 次传求后, 球仍回到甲的手中, 则不同的传球方式有 $N = 10$

对于条件比较复杂的排列组合问题, 不易用公式进行运算, 树图会收到意想不到的结果

练习: 分别编有 1, 2, 3, 4, 5 号码的人与椅, 其中 i 号人不坐 i 号椅 ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) 的不同坐法有多少种? $N = 44$

二十. 复杂分类问题表格策略

例 20. 有红、黄、兰色的球各 5 只, 分别标有 A、B、C、D、E 五个字母, 现从中取 5 只, 要求各字母均有且三色齐备, 则共有多少种不同的取法

解:

红	1	1	1	2	2	3
黄	1	2	3	1	2	1
兰	3	2	1	2	1	1
取法	$C_5^1 C_4^1$	$C_5^1 C_4^2$	$C_5^1 C_4^3$	$C_5^2 C_3^1$	$C_5^2 C_3^2$	$C_5^3 C_2^1$

一些复杂的分类选取题, 要满足的条件比较多, 无从入手, 经常出现重复遗漏的情况, 用表格法, 则分类明确, 能保证题中须满足的条件, 能达到好的效果.

小结

本节课, 我们对有关排列组合的几种常见的解题策略加以复习巩固. 排列组合历来是学习中的难点, 通过