柯西不等式

一、二维形式的柯西不等式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2\ \ (a,b,c,d\in R,\text{当且仅当}ad=bc\text{时,等号成立.})$$

证明:$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2=(\mathrm{ac}+\mathrm{bd})^2+(ad-bc)^2\ge(ac+bd)^2$

二、二维形式的柯西不等式的变式

(1)$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\ge|ac+bd|$ ($a,b,c,d\in R$, 当且仅当$ad=bc$时,等号成立.)

(2)$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\ge|ac|+|bd|$ ($a,b,c,d\in R$, 当且仅当$ad=bc$时,等号成立.)

(3)$(a+b)(c+d)\ge(\sqrt{ac}+\sqrt{bd})^2$ ($a,b,c,d\ge0$, 当且仅当$ad=bc$时,等号成立.)

三、二维形式的柯西不等式的向量形式

$$|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|.\text{(当且仅当}\vec{\beta}\text{是零向量,或存在实数}k\text{,使}\vec{\alpha}=k\vec{\beta}\text{时,等号成立.)}$$

例1 已知$x,y,a,b\in R^+$,且$\frac{a}{x}+\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{y}}=1$,求$x+y$的最小值.

变式1: 若$2x+3y=1$,求$4x^2+9y^2$的最小值,并求最小值点.

变式2: 若$3x+y=1$,求x^2+y^2的最小值,并求最小值点.

例2 求函数$y=\frac{1}{\cos^2x}+\frac{2}{\sin^2\mathrm{x}}$的最小值及此时$x$的值.

例3 已知$a>b>c$,求证:$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{\mathrm{b-c}}+\frac{1}{c-a}>0$.

补充练习

1.若$a,b\in R$,且$a^2+b^2=10$,则$a-b$的取值范围是( )

A.$[-2\sqrt{5},2\sqrt{5}]$　　B.$[-2\sqrt{10},2\sqrt{10}]$　　C.$[-\sqrt{10},\sqrt{10}]$　　D.$[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$

2.已知$x+y=1$,那么$2x^2+3y^2$的最小值是( )

A.$\frac{5}{6}$　　B.$\frac{6}{5}$　　C.$\frac{25}{36}$　　D.$\frac{36}{25}$

3.函数$y=2\sqrt{1-x}+\sqrt{2x+1}$的最大值为______.

4.设实数x,y满足$3x^2+2y^2\le6$,则$P=2x+y$的最大值是______.

5.已知$x^2+y^2=9$,则$x+2y$的取值范围______.

6.若$a\in R^+,b\in R^+$, $a+b=1$,则$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2$的最小值是______.

例 1

$$解:\because x,y,a,b\in R^{+},\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1,\therefore x+y=\left[(\sqrt{x})^{2}+(\sqrt{y})^{2}\right]\left[\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^{2}+\left(\sqrt{\frac{b}{y}}\right)^{2}\right]\geq(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2}$$

$$当且仅当\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{b}{y}}=\sqrt{y}\cdot\sqrt{\frac{a}{x}},即\frac{x}{y}=\sqrt{\frac{a}{b}}时取等号.\therefore (x+y)_{\min}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2}$$

变式 1：

$$解:由柯西不等式(4x^{2}+9y^{2})(1^{2}+1^{2})\geq(2x+3y)^{2}=1,\therefore 4x^{2}+9y^{2}\geq\frac{1}{2}.$$

$$当且仅当2x\cdot 1=3y\cdot 1,即2x=3y时取等号.$$

$$由\begin{cases}2x=3y\\2x+3y=1\end{cases}得\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\y=\frac{1}{6}\end{cases}\therefore 4x^{2}+9y^{2}的最小值为\frac{1}{2},最小值点为(\frac{1}{4},\frac{1}{6}).$$

变式 2： $x^{2}+y^{2}\geq\frac{1}{10}\,(x=\frac{3}{10},y=\frac{1}{10})$

答案：1、A； 2、B； 3、3； 4、$\sqrt{11}$； 5、$\left[-3\sqrt{5},3\sqrt{5}\right]$； 6、$\frac{25}{2}$；