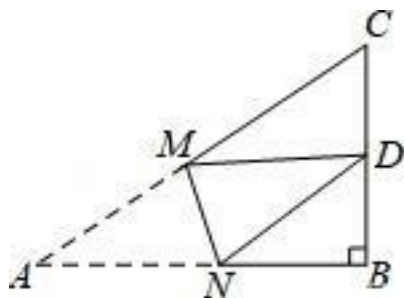


中考数学——六种类型折叠问题

类型 1 直角三角形的翻折或翻折后产生直角三角形的问题

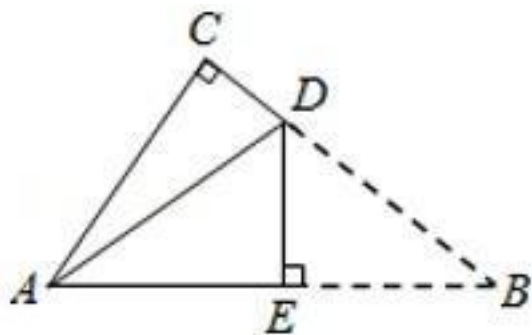
例 1. 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB=9$, $BC=6$, $\angle B=90^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 折叠, 使点 A 与 BC 的中点 D 重合, 折痕为 MN , 则线段 BN 的长为 ()



【分析】设 $BN=x$, 则由折叠的性质可得 $DN=AN=9-x$, 根据中点的定义可得 $BD=3$, 在 $\text{Rt}\triangle BND$ 中, 根据勾股定理可得关于 x 的方程, 解方程即可求解.

【解答】设 $BN=x$, 由折叠的性质可得 $DN=AN=9-x$,
 $\because D$ 是 BC 的中点, $\therefore BD=3$, 在 $\text{Rt}\triangle BND$ 中, $x^2+3^2=(9-x)^2$,
解得 $x=4$. 即 $BN=4$. 故选: A.

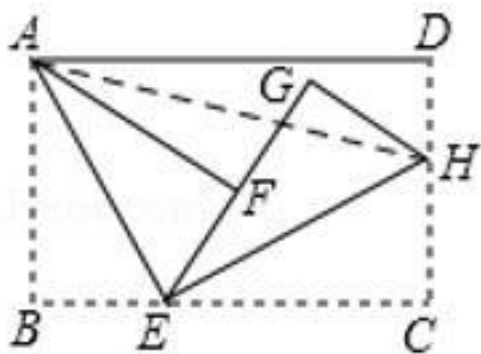
例 1 变式 1. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 直角边 $AC=6$, $BC=8$, 将 $\triangle ABC$ 按如图方式折叠, 使点 B 与点 A 重合, 折痕为 DE , 则 CD 的长为 ()



A. $25/4$ B. $22/3$ C. $7/4$ D. $5/3$

【解析】由题意得 $DB=AD$; 设 $CD=x$, 则 $AD=DB=(8-x)$,
 $\because \angle C=90^\circ$, $\therefore AD^2 - CD^2 = AC^2$, $(8-x)^2 - x^2 = 36$,
解得 $x=7/4$; 即 $CD=7/4$. 故选: C.

例 1 变式 2. 如图, 矩形 ABCD 中, $AB=4$, $AD=6$, 点 E 为 BC 上一点, 将 $\triangle ABE$ 沿 AE 折叠得到 $\triangle AEF$, 点 H 为 CD 上一点, 将 $\triangle CEH$ 沿 EH 折叠得到 $\triangle EHG$, 且 F 落在线段 EG 上, 当 $GF=GH$ 时, 则 BE 的长为_____.



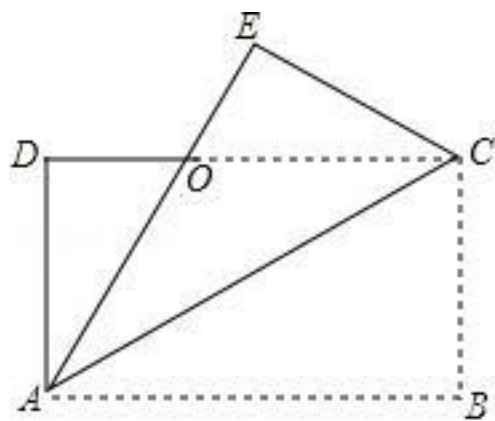
【解析】 由折叠可得 $\angle AEH = 1/2 \angle BEC = 90^\circ$, 进而得出 $Rt\triangle AEH$ 中, $AE^2 + EH^2 = AH^2$, 设 $BE=x$, 则 $EF=x$, $CE=6-x=EG$, 再根据勾股定理, 即可得到方程 $x^2 + 4^2 + (6-x)^2 + (6-2x)^2 = (2x-2)^2 + 6^2$, 解该一元二次方程, 即可得到 BE 的长. BE 的长为 2.

【点评】 本题主要考查的是翻折的性质、矩形的性质、勾股定理以及解一元二次方程的综合运用, 解决问题的关键是连接 AH 构造直角三角形 AEH, 这种折叠问题常设要求的线段长为 x, 然后根据折叠和轴对称的性质用含 x 的代数式表示其他线段的长度, 选择适当的直角三角形, 运用勾股定理列出方程求出答案.

方法策略模式: 在折叠后产生的直角三角形中, 把某条边设成未知数根据勾股定理列方程求解.

类型 2 翻折前有平行线这一条件的问题

例 2. 如图, 在长方形纸片 ABCD 中, $AD=4\text{cm}$, 把纸片沿直线 AC 折叠, 点 B 落在 E 处, AE 交 DC 于点 O, 若 $OC=5\text{cm}$, 则 CD 的长为 ()



A. 6cm B. 7cm C. 8cm D. 10cm

【分析】由折叠的性质可得： $\angle BAC = \angle EAC = \angle ACD$ ，可得 $AO = CO = 5\text{cm}$ ，根据勾股定理可求 DO 的长，即可求 CD 的长。

【解答】 \because 折叠， $\therefore \angle BAC = \angle EAC$ ，

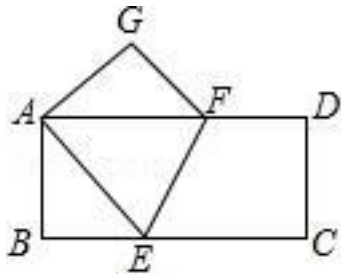
\because 四边形 $ABCD$ 是矩形， $\therefore AB \parallel CD$ ， $\therefore \angle BAC = \angle ACD$ ，

$\therefore \angle EAC = \angle ACD$ ， $\therefore AO = CO = 5\text{cm}$ ，

在直角三角形 ADO 中，利用勾股定理可求得 $DO = 3\text{cm}$ ，

$\therefore CD = DO + CO = 3 + 5 = 8\text{cm}$ 。故选：C。

例 2 变式。如图，矩形纸片 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $BC = 8$ ，现将 A 、 C 重合，使纸片折叠压平，设折痕为 EF ，则图形中重叠部分 $\triangle AEF$ 的面积为_____。



【解析】设 $AE = x$ ，由折叠可知， $EC = x$ ， $BE = 8 - x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中， $AB^2 + BE^2 = AE^2$ ，即 $4^2 + (8 - x)^2 = x^2$ ，解得： $x = 5$ ，

由折叠可知 $\angle AEF = \angle CEF$ ，

$\because AD \parallel BC$ ， $\therefore \angle CEF = \angle AFE$ ， $\therefore \angle AEF = \angle AFE$ ，即 $AE = AF = 5$ ，

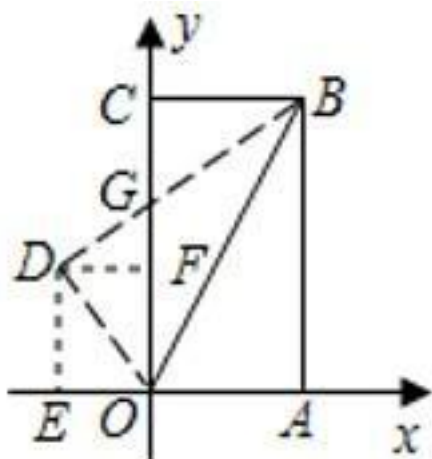
$\therefore S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \times AF \times AB = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10$ 。

故答案为：10。

方法策略模式：图形折叠后，相当于出现了角平分线，有角平分线，有平行，就会产生等腰三角形，我们去找那个等腰三角形一般就会使得问题得到解决。

类型 3 直角三角形的翻折，利用三垂直模型解答

例 3。如图，平面直角坐标系中，已知矩形 $OABC$ ， O 为原点，点 A 、 C 分别在 x 轴、 y 轴上，点 B 的坐标为 $(1, 2)$ ，连接 OB ，将 $\triangle OAB$ 沿直线 OB 翻折，点 A 落在点 D 的位置，则 $\cos \angle COD$ 的值是（ ）



A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{5}$

【分析】根据翻折不变性及勾股定理求出 GD、CG 的长，再根据相似三角形的性质，求出 DF 的长，OF 的长即可解决问题；

【解答】作 $DF \perp y$ 轴于 F， $DE \perp x$ 轴于 E，BD 交 OC 于 G.

\because 在 $\triangle BCG$ 与 $\triangle ODG$ 中，

$\angle BCG = \angle ODF$ ， $OD = BC$ ， $\angle DOF = \angle GBC$ ， $\therefore \triangle BCG \cong \triangle ODG$ ，

$\therefore GO = GB$ ， \therefore 设 $GO = GB = x$ ，则 $CG = GD = 2 - x$ ，

于是在 $Rt\triangle CGB$ 中， $(2 - x) + 1 = x$ ；解得 $x = \frac{5}{4}$ 。

$GD = 2 - x = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$ ；

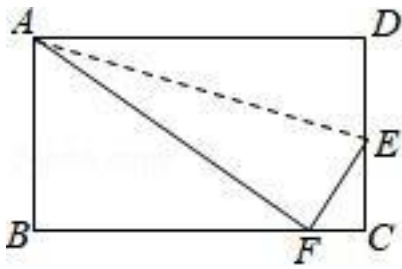
$\because BC \perp y$ 轴， $DF \perp y$ 轴， $\therefore \angle BCG = \angle DFG$ ，

$\because \angle BGC = \angle DGF$ ， $\therefore \triangle CBG \sim \triangle FDG$ ， $\therefore \frac{DF}{BC} = \frac{DG}{BG}$ ， $\therefore DF = \frac{3}{5}$ ；

又 $\because DO = 1$ ， $\therefore OF = \sqrt{1^2 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$ ， $\therefore \cos \angle DOC = \frac{OF}{OD} = \frac{4}{5}$ ，故选：D。

【点评】本题考查翻折变换、矩形的性质、相似三角形的判定和性质、勾股定理、锐角三角函数等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造相似三角形解决问题，属于中考常考题型。

例 3 变式. 如图，小红用一张长方形纸片 ABCD 进行折纸，使得顶点 D 落在边 BC 上的点 F 处（折痕为 AE）. 已知该纸片 AB 为 8cm，BC 为 10cm，则 EC 的长度为（ ）



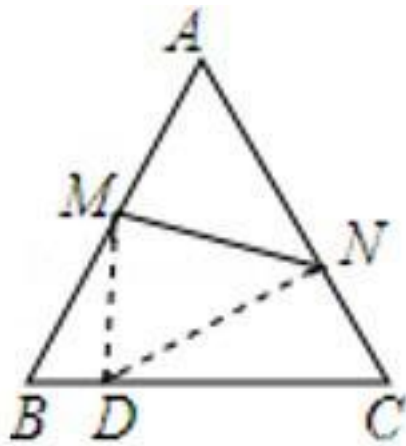
A. 6cm B. 5cm C. 4cm D. 3cm

【解析】由四边形 ABCD 是矩形，可得 $BC=AD=10\text{cm}$ ， $\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$ ，又由由折叠的性质可得： $AF=AD=10\text{cm}$ ， $\angle AFE=\angle D=90^\circ$ ，利用勾股定理即可求得 BF 的长，继而可得 FC 的长，然后由 $\triangle ABF \sim \triangle FCE$ ，利用相似三角形的对应边成比例，即可求得 EC 的长度。 $EC=3\text{cm}$ ，故选：D.

方法策略模式：如果图形中折叠的是一个直角，我们的处理方法一般是构造三垂直模型，找到一对相似三角形，根据相似的性质来解决问题。

类型 4 等边三角形的翻折一线三等角

例 4. 如图，等边 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边上的一点，把 $\triangle ABC$ 折叠，使点 A 落在 BC 边上的点 D 处，折痕与边 AB、AC 分别交于点 M、N，若 $AM=2$ ， $AN=3$ ，那么边 BC 长为_____.



【分析】设 $BD=x$ ， $DC=y$ 由 $\triangle BMD \sim \triangle CDN$ ，可得 $(BM+MD+BD) : (DN+NC+CD) = DM : DN = 2 : 3$ ，推出 $(2x+y) : (x+2y) = 2 : 3$ ，推出 $y=4x$ ，推出 $AB=BC=AC=5x$ ， $MB=5x-2$ ， $CN=5x-3$ ，再根据 $BM/CD=DM/DN=2/3$ ，构建方程即可解决问题；

【解答】解：设 $BD=x$ ， $DC=y$ ，

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形， $\therefore AB=BC=AC=x+y$ ， $\angle ABC=\angle ACB=\angle BAC=60^\circ$ ，

由折叠的性质可知：MN 是线段 AD 的垂直平分线，

$\therefore AM=DM=2$ ， $AN=DN=3$ ，

$$\therefore BM+MD+BD=2x+y, \quad DN+NC+DC=x+2y,$$

$$\because \angle MDN = \angle BAC = \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle NDC + \angle MDB = \angle BMD + \angle MBD = 120^\circ, \quad \therefore \angle NDC = \angle BMD,$$

$$\because \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ, \quad \therefore \triangle BMD \sim \triangle CDN,$$

$$\therefore (BM+MD+BD) : (DN+NC+CD) = DM : DN = 2 : 3,$$

$$\therefore (2x+y) : (x+2y) = 2 : 3,$$

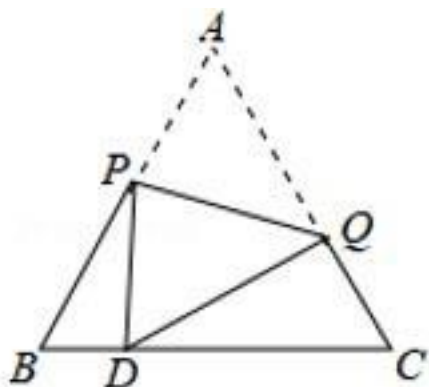
$$\therefore y = 4x, \quad \therefore AB = BC = AC = 5x, \quad MB = 5x - 2, \quad CN = 5x - 3,$$

$$\because BM/CD = DM/DN = 2/3,$$

$$\therefore (5x-2)/4x = 2/3, \quad \therefore x = 6/7, \quad \therefore BC = 5x = 30/7, \quad \text{故答案为 } 30/7.$$

【点评】 本题考查了等边三角形的性质、相似三角形的判定和性质以及折叠的性质：折叠是一种对称变换，它属于轴对称，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等。

例 4 变式. 如图所示，等边 $\triangle ABC$ 中，边长为 4，P、Q 为 AB、AC 上的点，将 $\triangle ABC$ 沿着 PQ 折叠，使得 A 点与线段 BC 上的点 D 重合，且 $BD : CD = 1 : 3$ ，则 AQ 的长度为_____.

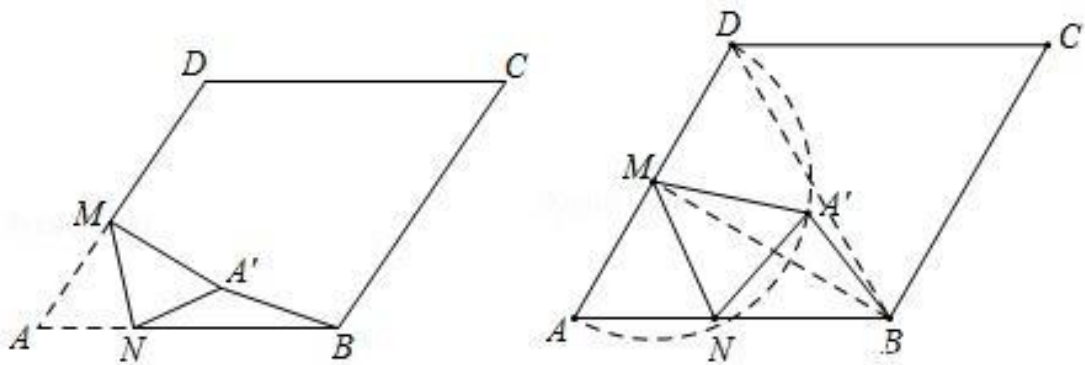


【解析】 易得 $\triangle BPD \sim \triangle CDQ$ ，可得 $BD/CQ = DP/DQ = BP/CD$ ，由 $BD : DC = 1 : 3$ ， $BC = 4$ ，推出 $DB = 1$ ， $CD = 3$ ，设 $AQ = x$ ，则 $CQ = 4 - x$ ，构建方程即可解决问题； $AQ = 13/5$ 。

方法策略模式：等边三角形折叠后，会出现三个 60 度的角，一般情况下我们会找到一对相似三角形，根据相似的性质来解决问题。

类型 5 过一定点的翻折与隐形圆

例 5. 如图，在边长为 8 的菱形 ABCD 中， $\angle A = 60^\circ$ ，M 是边 AD 的中点，N 是 AB 上一点，将 $\triangle AMN$ 沿 MN 所在的直线翻折得到 $\triangle A'MN$ ，连接 $A'B$ ，则 $A'B$ 的取值范围_____



【分析】连接 BM , BD , 依据 M 是边 AD 的中点, $\triangle AMN$ 沿 MN 所在的直线翻折得到 $\triangle A'MN$, 即可得到点 A' 的轨迹为以 AD 为直径的半圆 M , 依据 $A'B + A'M \geq BM$, 即可得出 $A'B \geq BM - A'M = 4\sqrt{3} - 4$, 当点 N 与点 A 或点 D 重合时, $A'B$ 的最大值为 8 , 即可得到 $A'B$ 的取值范围.

【解答】如图所示, 连接 BM , BD ,

$\because M$ 是边 AD 的中点, $\triangle AMN$ 沿 MN 所在的直线翻折得到 $\triangle A'MN$,

\therefore 点 A' 的轨迹为以 AD 为直径的半圆 M , $A'M = AM = 4$,

$\because \angle A = 60^\circ$, $AB = AD$, $\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形,

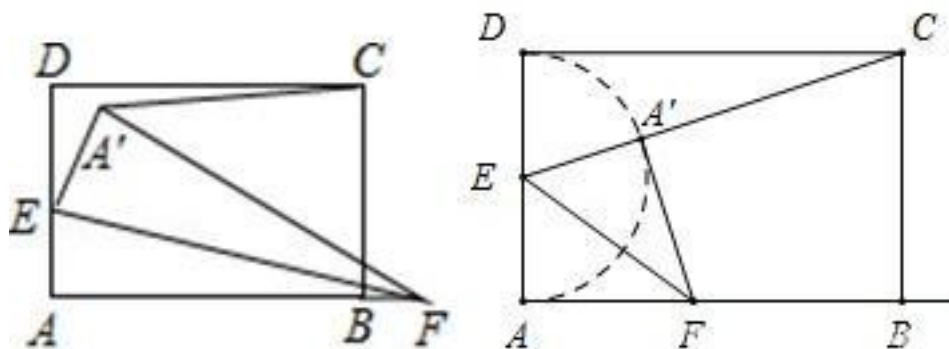
$\therefore BM \perp AD$, $\angle ABM = 30^\circ$, $\therefore BM = \sqrt{3}AM = 4\sqrt{3}$,

$\therefore A'B + A'M \geq BM$, $\therefore A'B \geq BM - A'M = 4\sqrt{3} - 4$,

当点 N 与点 A 或点 D 重合时, 点 A' 与点 A 或点 D 重合, 此时 $A'B$ 的最大值为 8 , $\therefore A'B$ 的取值范围为: $4\sqrt{3} - 4 \leq A'B \leq 8$,

故答案为: $4\sqrt{3} - 4 \leq A'B \leq 8$.

例 5 变式. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AD = 2$, $AB = 3$, 点 E 是 AD 边的中点, 点 F 是射线 AB 上的一动点, 将 $\triangle AEF$ 沿 EF 所在的直线翻折得到 $\triangle A'EF$, 连接 $A'C$, 则 $A'C$ 的最小值为_____.

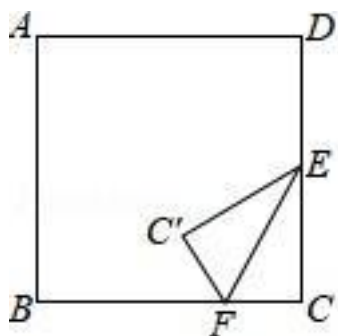


【解析】根据点 F 是射线 AB 上的一动点，将 $\triangle AEF$ 沿 EF 所在的直线翻折得到 $\triangle A'EF$ ，可得点 A' 的运动路径为以 E 为圆心，AE 长为半径的半圆，再根据两点之间线段最短，即可得出当点 A'、C、E 三点共线时，A' C 的长最小，最后根据勾股定理进行计算即可。即 A' C 的最小值为 $\sqrt{10}-1$

方法策略模式：如果翻折的折痕是过一定点的，就会出现隐形圆，一般我们用点圆最值模型来求最值。

类型 6 折叠后图形不确定的多解的折叠问题

例 6. 如图，正方形 ABCD 的边长是 2，点 E 是 CD 边的中点，点 F 是边 BC 上不与点 B，C 重合的一个动点，把 $\angle C$ 沿直线 EF 折叠，使点 C 落在点 C' 处。当 $\triangle ADC'$ 为等腰三角形时，FC 的长为_____。



【分析】首先证明 $DC' \neq DA$ ，只要分两种情形讨论即可：①如图 1 中，当 $AD=AC' = 2$ 时，连接 AE。构建方程即可；②如图 2 中，当点 F 在 BC 中点时，易证 $AC' = DC'$ ，满足条件；

【解答】由题意 $DE=EC=EC' = 1$ ， $\therefore DC' < 1+1$

$\therefore DC' \neq DA$ ，只要分两种情形讨论即可：

①如图 1 中，当 $AD=AC' = 2$ 时，连接 AE。

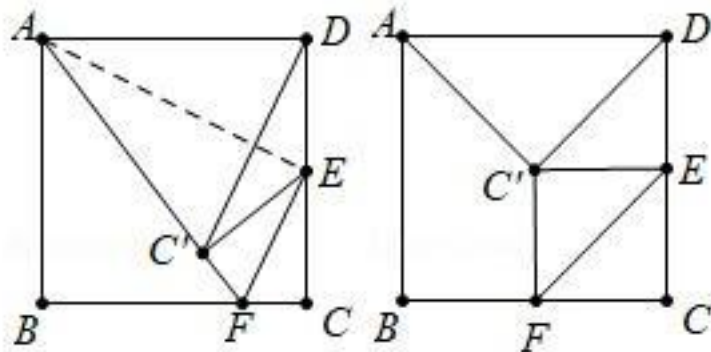


图1

图2

$\because AE=AE, AD=AC', DE=DC',$
 $\therefore \triangle ADE \cong \triangle AC'E, \therefore \angle ADE = \angle AC'E = 90^\circ,$
 $\because \angle C = \angle FC'E = 90^\circ, \therefore \angle AC'E + \angle FC'E = 180^\circ,$
 $\therefore A, C', F$ 共线, 设 $CF=x$, 则 $BF=2-x, AF=2+x$,
 在 $Rt\triangle ABF$ 中, $2^2 + (2-x)^2 = (2+x)^2$, 解得 $x=1/2$.

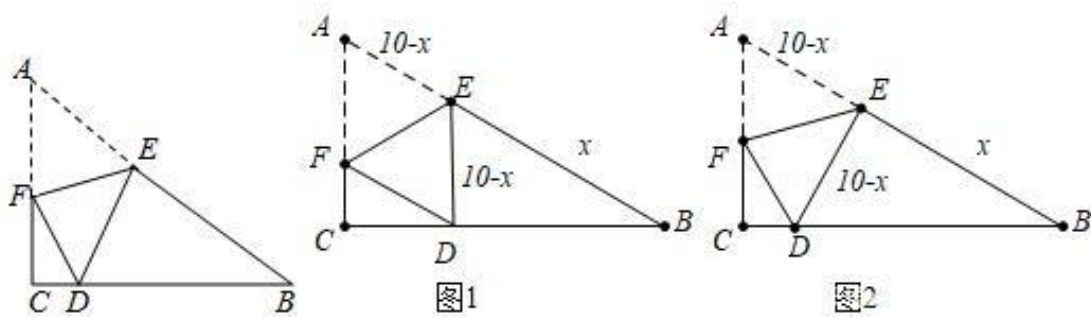
②如图 2 中, 当点 F 在 BC 中点时, 易证 $AC' = DC'$, 满足条件, 此时 $CF=1$.

综上所述, 满足条件的 CF 的长为 $1/2$ 或 1 .

故答案为 $1/2$ 或 1 .

【点评】本题考查翻折变换、正方形的性质、全等三角形的判定和性质、等腰三角形的判定和性质等知识, 解题的关键是学会用分类讨论的首先思考问题, 属于中考填空题中的压轴题.

例 6 变式. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=6, BC=8$, 点 E, F 分别为 AB, AC 上一个动点, 连接 EF , 以 EF 为轴将 $\triangle AEF$ 折叠得到 $\triangle DEF$, 使点 D 落在 BC 上, 当 $\triangle BDE$ 为直角三角形时, BE 的值为_____.



【解析】分两种情形分别求解：①如图 1 中, 当 $\angle EDB=90^\circ$ 时, 设 $BE=x$. 则 $AE=ED=10-x$. 利用平行线的性质, 构建方程即可解决问题; ②如图 2 中, 当 $\angle DEB=90^\circ$, 设 $BE=x$, 则 $AE=ED=10-x$. 根据 $\tan \angle DBE = DE/BE = AC/BC$, 构建方程即可; 满足条件的 BE 的值为 $25/4$ 或 $40/7$.

方法策略模式: 此类题目往往涉及知识点多, 综合性强, 大部分情况下还需分类讨论. 同学们在这类题上得分率较低, 反思其原因, 无法准确画出所需要的图形是导致错误的重要原因之一, 因此要明确分折叠操作后图形是否确定, 可能出现情况有那些。

总结提升

经过以上六个类型问题分析，我们不难得到解决这类问题思维模式。具体如下：

1. 折叠后能够重合的线段相等，能够重合的角相等，能够重合的三角形全等，折叠前后的图形关于折痕对称，对应点到折痕的距离相等。
2. 折叠类问题中，如果翻折的是直角，那么可以构造三垂直模型，利用三角形相似解决问题；
3. 折叠类问题中，如果有平行线，那么翻折后就有可能出现等腰三角形，或者角平分；
4. 折叠类问题中，如果有新的直角三角形出现，我们可以设未知数，根据勾股定理列方程求解；
5. 折叠类问题中，如果折痕过某一定点，这是往往用辅助圆来解决问题，一般试题考查的是点圆最值问题。
6. 折叠后图形不明确，应明确分析出可能出现情形，一次分析验证，可借助纸片模拟分析。