离心率的五种求法

椭圆的离心率 $0<e<1$，双曲线的离心率 $e>1$，抛物线的离心率 $e=1$.

一、直接求出 a、c，求解 e

已知圆锥曲线的标准方程或 a、c 易求时，可利用率心率公式 $e=\dfrac{c}{a}$ 来解决。

例 1：已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$（$a>0$）的一条准线与抛物线 $y^2=-6x$ 的准线重合，则该双曲线的离心率为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

解：抛物线 $y^2=-6x$ 的准线是 $x=\dfrac{3}{2}$，即双曲线的右准线 $x=\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{c^2-1}{c}=\dfrac{3}{2}$，则 $2c^2-3c-2=0$，解得 $c=2$，$a=\sqrt{3}$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，故选 D

变式练习 1：若椭圆经过原点，且焦点为 $F_1(1,0)$、$F_2(3,0)$，则其离心率为（　　）

A. $\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

解：由 $F_1(1,0)$、$F_2(3,0)$ 知 $2c=3-1$，$\therefore c=1$，又$\because$椭圆过原点，$\therefore a-c=1$，$a+c=3$，$\therefore a=2$，$c=1$，所以离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$.故选 C.

变式练习2：如果双曲线的实半轴长为2，焦距为6，那么双曲线的离心率为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D 2

解：由题设 $a=2$，$2c=6$，则 $c=3$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{2}$，因此选 C

变式练习 3：点 P（-3，1）在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左准线上，过点 P 且方向为 $\vec{a}=(2,-5)$ 的光线，经直线 $y=-2$ 反射后通过椭圆的左焦点，则这个椭圆的离心率为（　　）

A $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B $\dfrac{1}{3}$　　C $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D $\dfrac{1}{2}$

解：由题意知，入射光线为 $y-1=-\dfrac{5}{2}(x+3)$，关于 $y=-2$ 的反射光线（对称关系）为 $5x-2y+5=0$，

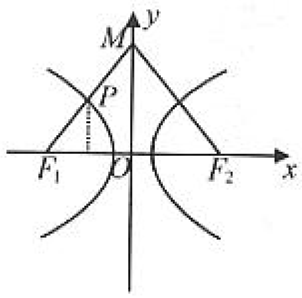
则 $\begin{cases}\dfrac{a^2}{c}=3\\ -5c+5=0\end{cases}$ 解得 $a=\sqrt{3}$，$c=1$，则 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故选 A

二、构造 a、c 的齐次式，解出 e

根据题设条件，借助 a、b、c 之间的关系，构造 a、c 的关系（特别是齐二次式），进而得到关于 e 的一元方程，从而解得离心率 e。

例 2：已知F_1、F_2是双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）的两焦点，以线段$F_1F_2$为边作正三角形$MF_1F_2$，若边$MF_1$的中点在双曲线上，则双曲线的离心率是（　　）

A. $4+2\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}-1$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$　　D. $\sqrt{3}+1$



解：如图，设MF_1的中点为P，则P的横坐标为$-\dfrac{c}{2}$，由焦半径公式$|PF_1|=-ex_p-a$，

即$c=-\dfrac{c}{a}\times\left(-\dfrac{c}{2}\right)-a$，得$\left(\dfrac{c}{a}\right)^2-2\left(\dfrac{c}{a}\right)-2=0$，解得

$e=\dfrac{c}{a}=1+\sqrt{3}$（$1-\sqrt{3}$舍去），故选 D

变式练习 1：设双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$0<a<b$）的半焦距为$c$，直线$L$过$(a,0)$，$(0,b)$两点.已知原点到直线的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}c$，则双曲线的离心率为(　　)

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

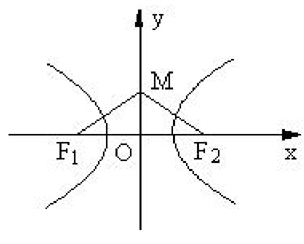
解：由已知，直线L的方程为$bx+ay-ab=0$，由点到直线的距离公式，得$\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}c$，

又$c^2=a^2+b^2$, $\therefore 4ab=\sqrt{3}c^2$,两边平方，得$16a^2\left(c^2-a^2\right)=3c^4$，整理得$3e^4-16e^2+16=0$，

得$e^2=4$或$e^2=\dfrac{4}{3}$，又$0<a<b$ ，$\therefore e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2}=1+\dfrac{b^2}{a^2}>2$，$\therefore e^2=4$，$\therefore e=2$，故选 A

变式练习 2：双曲线虚轴的一个端点为M，两个焦点为F_1、F_2，$\angle F_1MF_2=120^0$，则双曲线的离心率为（　　）

A　$\sqrt{3}$　　B　$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　C　$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　D　$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



解：如图所示，不妨设$M(0,b)$，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，则

$|MF_1|=|MF_2|=\sqrt{c^2+b^2}$，又$|F_1F_2|=2c$，

在ΔF_1MF_2中， 由余弦定理，得$\cos\angle F_1MF_2=\dfrac{|MF_1|^2+|MF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|MF_1|\cdot|MF_2|}$，

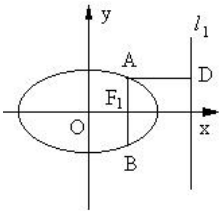
即$-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\left(c^2+b^2\right)+\left(c^2+b^2\right)-4c^2}{2\left(c^2+b^2\right)}$，$\therefore\dfrac{b^2-c^2}{b^2+c^2}=-\dfrac{1}{2}$，

$\because b^2=c^2-a^2$，$\therefore \dfrac{-a^2}{2c^2-a^2}=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore 3a^2=2c^2$，$\therefore e^2=\dfrac{3}{2}$，$\therefore e=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，故选 B

三、采用离心率的定义以及椭圆的定义求解

例 3： 设椭圆的两个焦点分别为 F_1、F_2，过 F_2 作椭圆长轴的垂线交椭圆于点 P，若 ΔF_1PF_2 为等腰直角三角形，则椭圆的离心率是________。

解： $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{2c}{|PF_1|+|PF_2|}=\dfrac{2c}{2\sqrt{2}c+2c}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$



四、根据圆锥曲线的统一定义求解

例4： 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）的右焦点为 F_1，右准线为 l_1，若过 F_1 且垂直于 x 轴的弦的长等于点 F_1 到 l_1 的距离，则椭圆的离心率是____________.

解： 如图所示，AB 是过 F_1 且垂直于 x 轴的弦，$\because AD\perp l_1$ 于 D，$\therefore |AD|$ 为 F_1 到准线 l_1 的距离，根据椭圆的第二定义，$e=\dfrac{|AF_1|}{|AD|}=\dfrac{\frac{1}{2}|AB|}{|AD|}=\dfrac{1}{2}$

变式练习： 在给定椭圆中，过焦点且垂直于长轴的弦长为 $\sqrt{2}$，焦点到相应准线的距离为 1，则该椭圆的离心率为（　　）

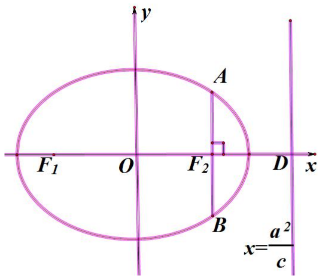
A $\sqrt{2}$　　　　B $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　　　C $\dfrac{1}{2}$　　　　D $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

解： $e=\dfrac{|AF_2|}{|AD|}=\dfrac{\sqrt{2}/2}{1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

五、构建关于 e 的不等式，求 e 的取值范围

例 5： 设 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，则二次曲线 $x^2\cot\theta-y^2\tan\theta=1$ 的离心率的取值范围为（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　　　B. $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　　　C. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},2\right)$　　　　D. $(2,+\infty)$

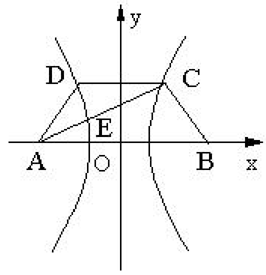


另： 由 $x^2\cot\theta-y^2\tan\theta=1$，$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，得 $a^2=\tan\theta$，$b^2=\cot\theta$，

$\therefore c^2=a^2+b^2=\tan\theta+\cot\theta$，$\therefore e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{\tan\theta+\cot\theta}{\tan\theta}=1+\cot^2\theta$

$\because \theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\therefore \cot^2\theta>1$，$\therefore e^2>2$，$\therefore e>\sqrt{2}$，故选 D

例6：如图，已知梯形 $ABCD$ 中，$|AB|=2|CD|$，点 E 分有向线段 $\overrightarrow{AC}$ 所成的比为 λ，双曲线过 C、D、E 三点，且以 A、B 为焦点．当 $\frac{2}{3}\le\lambda\le\frac{3}{4}$ 时，求双曲线离心率 e 的取值范围。



解：以 AB 的垂直平分线为 y 轴，直线 AB 为 x 轴，建立如图所示的直角坐标系 xoy，则 $CD\perp y$ 轴.因为双曲线经过点 C、D，且以 A、B 为焦点，由双曲线的对称性知 C、D 关于 y 轴对称．依题意，记 $A(-c,0)$，$C\left(\frac{c}{2},h\right)$，$E(x_0,y_0)$，其中 $c=\frac{1}{2}|AB|$ 为双曲线的半焦距，h 是梯形的高.

由定比分点坐标公式得 $x_0=\dfrac{-c+\lambda\cdot\frac{c}{2}}{1+\lambda}=\dfrac{(\lambda-2)c}{2(1+\lambda)}$，$y_0=\dfrac{\lambda h}{1+\lambda}$，设双曲线的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，则离心率 $e=\dfrac{c}{a}$，由点 C、E 在双曲线上，所以，将点 C 的坐标代入双曲线方程得 $\dfrac{c^2}{4a^2}-\dfrac{h^2}{b^2}=1$①

将点 E 的坐标代入双曲线方程得 $\dfrac{c^2}{4a^2}\left(\dfrac{\lambda-2}{1+\lambda}\right)^2-\dfrac{h^2}{b^2}\left(\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\right)^2=1$②

再将 $e=\dfrac{c}{a}$①、②得 $\dfrac{e^2}{4}-\dfrac{h^2}{b^2}=1$，$\therefore\dfrac{h^2}{b^2}=\dfrac{e^2}{4}-1$③

$\dfrac{e^2}{4}\left(\dfrac{\lambda-2}{1+\lambda}\right)^2-\dfrac{h^2}{b^2}\left(\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\right)^2=1$④

将③式代入④式，整理得 $\dfrac{e^2}{4}(4-4\lambda)=1+2\lambda$，$\therefore\lambda=1-\dfrac{3}{e^2+2}$，由题设 $\dfrac{2}{3}\le\lambda\le\dfrac{3}{4}$ 得：

$\dfrac{2}{3}\le1-\dfrac{3}{e^2+2}\le\dfrac{3}{4}$，解得 $\sqrt{7}\le e\le\sqrt{10}$，所以双曲线的离心率的取值范围为 $\left[\sqrt{7},\sqrt{10}\right]$

配套练习

1. 设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）的离心率为$\sqrt{3}$，且它的一条准线与抛物线$y^2=4x$的准线重合，则此双曲线的方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{24}=1$　　B. $\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{96}=1$　　C. $\frac{x^2}{3}-\frac{2y^2}{3}=1$　　D. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$

2．已知椭圆的长轴长是短轴长的 2 倍，则椭圆的离心率等于（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

3．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的一条渐近线方程为$y=\frac{4}{3}x$，则双曲线的离心率为（　　）

A $\frac{5}{3}$　　B $\frac{4}{3}$　　C $\frac{5}{4}$　　D $\frac{3}{2}$

4．在给定椭圆中，过焦点且垂直于长轴的弦长为$\sqrt{2}$，焦点到相应准线的距离为 1，则该椭圆的离心率为

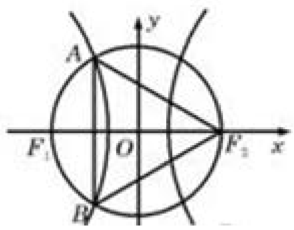
A $\sqrt{2}$　　B $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C $\frac{1}{2}$　　D $\frac{\sqrt{2}}{4}$

5．在给定双曲线中，过焦点垂直于实轴的弦长为$\sqrt{2}$，焦点到相应准线的距离为$\frac{1}{2}$，则该双曲线的离心率为（　　）

A $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B 2　　C $\sqrt{2}$　　D $2\sqrt{2}$

6. 如图，F_1和F_2分别是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）的两个焦点，$A$和$B$是以$O$为圆心，以$|OF_1|$为半径的圆与该双曲线左支的两个交点，且$\Delta F_2AB$是等边三角形，则双曲线的离心率为（　　）

A $\sqrt{3}$　　B $\sqrt{5}$　　C $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D $\sqrt{3}+1$



7. 设F_1、F_2分别是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点，$P$是其右准线上纵坐标为$\sqrt{3}c$（$c$为半焦距）的点，且$|F_1F_2|=|F_2P|$，则椭圆的离心率是（　　）

A $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　B $\frac{1}{2}$　　C $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　D $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8．设 F_1、F_2 分别是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点，若双曲线上存在点 A，使 $\angle F_1AF_2=90^0$，且 $|AF_1|=3|AF_2|$，则双曲线离心率为（　　）

A $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　　C $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$　　D $\sqrt{5}$

9．已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）的右焦点为 F，若过点 F 且倾斜角为 60^0 的直线与双曲线的右支有且只有一个交点，则此双曲线离心率的取值范围是（　　）

A $[1,2]$　　B $(1,2)$　　C $[2,+\infty)$　　D $(2,+\infty)$

10．椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的焦点为 F_1、F_2，两条准线与 x 轴的交点分别为 M、N，若 $|MN|\le 2|F_1F_2|$，则该椭圆离心率的取值范围是（　　）

A．$\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$　　B．$\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　C．$\left[\dfrac{1}{2},1\right)$　　D．$\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

参考答案：

1. 由 $\frac{c}{a}=\sqrt{3},\ \frac{a^2}{c}=1$ 可得 $a=\sqrt{3},b=\sqrt{6},c=3$. 故选 D

2.已知椭圆的长轴长是短轴长的 2 倍，∴ $a=2b$，椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，选 D。

3.双曲线焦点在 x 轴,由渐近线方程可得 $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$,可得 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3^2+4^2}}{3}=\frac{5}{3}$,故选 A

4.不妨设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），则有 $\frac{2b^2}{a}=\sqrt{2}$ 且 $\frac{a^2}{c}-c=1$，据此求出 e= $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5.不妨设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$），则有 $\frac{2b^2}{a}=\sqrt{2}$ 且 $c-\frac{a^2}{c}=\frac{1}{2}$，据此解得 e= $\sqrt{2}$，选 C

6.解析：如图，F_1 和 F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{r^2}{b^2}=1(a\succ 0,b\succ 0)$ 的两个焦点，A 和 B 是以 O 为圆心，以 $\left|OF_1\right|$ 为半径的圆与该双曲线左支的两个交点，且△ F_2AB 是等边三角形，连接 AF_1，$\angle AF_2F_1=30°$，$|AF_1|=c$，$|AF_2|=\sqrt{3}c$，∴ $2a=(\sqrt{3}-1)c$，双曲线的离心率为 $1+\sqrt{3}$，选 D。

7. 由已知 P（$\frac{a^2}{c},\sqrt{3}c$），所以 $2c=\sqrt{(\frac{a^2}{c}-c)^2+(\sqrt{3}c)^2}$ 化简得 $a^2-2c^2=0\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8.设 F_1，F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点。若双曲线上存在点 A，使 $\angle F_1AF_2=90^o$，且 $|AF_1|=3|AF_2|$，设 $|AF_2|=1$，$|AF_1|=3$，双曲线中 $2a=|AF_1|-|AF_2|=2$，$2c=\sqrt{|AF_1|^2+|AF_2|^2}=\sqrt{10}$，∴ 离心率 $e=\frac{\sqrt{10}}{2}$，选 B。

9.双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，若过点 F 且倾斜角为 60^o 的直线与双曲线的右支有且只有一个交点，则该直线的斜率的绝对值小于等于渐近线的斜率 $\frac{b}{a}$，∴ $\frac{b}{a}\geqslant\sqrt{3}$，离心率 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}\geqslant 4$，∴ e≥2，选 C

10.椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点为 F_1，F_2，两条准线与 x 轴的交点分别为 M，N，若 $|MN|=2\frac{a^2}{c}$，$|F_1F_2|=2c$，$\left|MN\right|\leqslant 2\left|F_1F_2\right|$，则 $\frac{a^2}{c}\le 2c$，该椭圆离心率 e≥ $\frac{\sqrt{2}}{2}$，选 D