函数的零点和最值

一、函数零点

函数 $y=f(x)$，使得 $f(x)=0$ 成立的实数 x 叫做函数 $y=f(x)$ 的零点。

二、根的存在定理

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $\left[a,b\right]$ 上的图像是连续不断的一条曲线，并且有 $f(a)f(b)<0$，那么函数 $y=f(x)$ 在区间 $\left(a,b\right)$ 内至少有一个零点，即有 $c\in\left(a,b\right)$ 使得 $f(c)=0$。

这个条件不是充分必要条件。

三、二分法

对于在区间 $\left[a,b\right]$ 上连续且满足 $f(a)f(b)<0$ 的函数 $y=f(x)$，通过不断把函数 $f(x)$ 的零点所在的区间一分为二，使区间的两个端点逐步逼近零点，从而得到零点的近似值。

步骤：

（1）确定区间 $\left[a,b\right]$，验证 $f(a)f(b)<0$，给定精确度 ε，

（2）求区间 $\left[a,b\right]$ 的中点 x_1，

（3）计算 $f\left(x_1\right)$

若 $f\left(x_1\right)=0$，则 x_1 就是函数的零点；

若 $f(a)f\left(x_1\right)<0$，令 $b=x_1$，此时零点 $x_0\in\left(a,x_1\right)$；

若 $f\left(x_1\right)f(b)<0$，令 $a=x_1$，此时零点 $x_0\in\left(x_1,b\right)$。

（4）判断是否达到精确度 ε，即若 $\left|a-b\right|<\varepsilon$，则得到零点的近似值 a（或 b）；

否则重复（2）~（4）。

四、一元二次方程根的分布

设 x_1,x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\left(a>0\right)$ 的两个实数根，$x_0=-\dfrac{b}{2a}$，

令 $f(x)=ax^2+bx+c\left(a>0\right)$，则

（1）$x_1<m,x_2<m\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(x_0\right)\le 0\\ f\left(m\right)>0\\ x_0<m\end{cases}$；　　（2）$x_1<m<x_2\Leftrightarrow f(m)<0$；

（3）$x_1>m,x_2>m\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(x_0\right)\le 0\\ f\left(m\right)>0\\ x_0>m\end{cases}$；　　（4）$m<x_1\le x_2<n\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(x_0\right)\le 0\\ f\left(m\right)>0\\ f\left(n\right)>0\\ m<x_0<n\end{cases}$。

例 1 若函数 $f(x)=2^{-x+1}-\lg x$ 有一个零点在区间 $(n,n+1)$ $(n\in N)$，则 $n=$______。

如果从区间 $[n,n+1]$ 开始，用二分法求这个零点，精确度为 0.001 的近似值，则需要对分区间的次数至多为________。

变式 1：若函数 $f(x)=a^x-x-a$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$）有两个零点，则实数 a 的取值范围是________。

例 2：若函数 $f(x)=2ax^2+2x-3$，如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有零点，求实数 a 的取值范围。

变式 2：已知函数 $f(x)=3ax+1-2a$ 在区间 $(-1,1)$ 上存在 x_0 使得 $f(x_0)=0$，则实数 a 的取值范围是________。

变式 3：已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+1$ $(a,b\in R,a>0)$，方程 $f(x)=x$ 有两个实根 x_1,x_2，且满足 $x_1<2<x_2<4$。设的对称轴方程为 $x=x_0$。求证：$x_0+1>0$。

例 3 某旅游公司有客房 300 间，每间日租房为 20 元时，每天都客满。公司欲提高档次，并提高租金。若每间客房每日增加 2 元，客房出租就会减少 10 间。若不考虑其他因素，公司将房间租金提高多少的时，每天客房的租金总收入最高？

四、函数的单调性与值域

（一）、知识梳理

1、增函数和减函数的定义

2、函数的单调性和单调区间

3、判断函数单调性的方法：定义法、图像法、导数法

4、函数的最值及其几何意义

5、函数的值域的求法

单调性法、配方法、换元法、判别式法、图像法、不等式法、导数法等。

6、复合函数的单调性（同增异减）

例 4 求下列函数的值域

（1） $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}+x$；

（2） $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}\left(a>0,b>0,x>0\right)$；

（3） $f\left(x\right)=x+\sqrt{1-x^2}$；

（4） $f\left(x\right)=x+\dfrac{1}{x-3}\left(x>3\right)$；

（5） $f\left(x\right)=x^2+\dfrac{1}{x}\left(x\le -\dfrac{1}{2}\right)$；

（6） $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$；

（7） $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2-x+1}$

习题：

1、二次函数 $f(x)=a^2x^2+ax$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 上有零点，则实数 a 的取值范围是(　　)。

A． $a>0$　　B． $a<-1$　　C． $a>0$ 或 $a<-1$　　D． $a\in R$

2、函数 $f(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$ 的零点所在区间是(　　)。

A． $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　B． $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　C． $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$　　D． $\left(\dfrac{3}{2},2\right)$

3、设函数 $f(x)=2^x-x-4$， x_0 是函数 $f(x)$ 的一个正数零点，且 $x_0\in\left(a,a+1\right)$，其中 $a\in N$，则 $a=$ ________。

4、函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3 & x\le 0\\ -2+\ln x & x>0\end{cases}$ 的零点个数为（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

5、关于 x 的方程 $2^{2x}+2^x a+a+3=0$ 有实根，则实数 a 的取值范围是________。

6、若方程 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=x^{\frac{1}{3}}$ 有解 x_0，则 x_0 属于以下哪个区间（　　）

A． $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$　　B． $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$　　C． $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　D． $\left(1,2\right)$

7、函数 $f(x)$ 是连续的偶函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)$ 是单调函数，则满足 $f(x)=f\left(\dfrac{x+3}{x+4}\right)$ 的所有 x 之和是（　　）

A．-3　　B．3　　C．-8　　D．8

8、函数 $y=\lg x-x+2$ 的零点个数是________。

9、函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是（　　）

A．增函数　　B．减函数　　C．不具有单调性　　D．无法判断

10、函数 $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$ 的 $[3,4)$ 上（　　）

A．有最小值无最大值　　B．有最大值无最小值

C．既有最大值又有最小值　　D．最大值和最小值都不存在

11、（2009 福建卷）下列函数 $f(x)$ 中满足"对任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$"的是（　　）。

A．$f(x)=\dfrac{1}{x}$　　B．$f(x)=(x-1)^2$

C．$f(x)=e^x$　　D．$f(x)=\ln(x+1)$

12、函数 $f(x)=x+\sqrt{1-2x}$ 的值域是（　　）

A．$(-\infty,1]$　　B．$(-\infty,-1]$　　C．R　　D．$[1,+\infty)$

13、函数 $f(x)$ 的值域是 $[-2,2]$，则 $f(x-2)$ 的值域是（　　）

A．$[-2,2]$　　B．$[-4,0]$　　C．$[0,4]$　　D．$[-1,1]$

14、求下列函数的值域：

（1）$y=x+\sqrt{x-1}$；　　（2）$y=x+\sqrt{1-x}$；

（3）$y=\begin{cases}x^2+1, & -1\le x\le 2\\ -6x+17, & 2\le x<3\end{cases}$；　　（4）$y=4^x+2^x-3$。