第一课时 3.1 二维形式的柯西不等式（一）

2. 练习：已知 a、b、c、d 为实数，求证 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$

① 提出定理 1：若 a、b、c、d 为实数，则 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$.

证法一：（比较法）$(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2=\ldots.=(ad-bc)^2\geq 0$

证法二：（综合法）$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$

$=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2\geq(ac+bd)^2$. （要点：展开→配方）

证法三：（向量法）设向量 $\vec{m}=(a,b)$，$\vec{n}=(c,d)$，则 $|\vec{m}|=\sqrt{a^2+b^2}$，$|\vec{n}|=\sqrt{c^2+d^2}$.

∵ $\vec{m}\bullet\vec{n}=ac+bd$，且 $\vec{m}\bullet\vec{n}=|\vec{m}|\bullet|\vec{n}|\bullet\cos<\vec{m},\vec{n}>$，则 $|\vec{m}\bullet\vec{n}|\leq|\vec{m}|\bullet|\vec{n}|$. ∴ …..

证法四：（函数法）设 $f(x)=(a^2+b^2)x^2-2(ac+bd)x+c^2+d^2$，则

$f(x)=(ax-c)^2+(bx-d)^2\geqslant 0$ 恒成立.

∴ $\Delta=[-2(ac+bd)]^2-4(a^2+b^2)(c^2+d^2)\leqslant 0$，即…..

③二维形式的柯西不等式的一些变式：

$\sqrt{a^2+b^2}\bullet\sqrt{c^2+d^2}\geq|ac+bd|$ 或 $\sqrt{a^2+b^2}\bullet\sqrt{c^2+d^2}\geq|ac|+|bd|$ 或 $\sqrt{a^2+b^2}\bullet\sqrt{c^2+d^2}\geq ac+bd$.

④ 提出定理 2：设 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 是两个向量，则 $|\vec{\alpha}\bullet\vec{\beta}|\leq|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$.

即柯西不等式的向量形式（由向量法提出 ）

→ 讨论：上面时候等号成立？（$\vec{\beta}$ 是零向量，或者 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 共线）

⑤ 练习：已知 a、b、c、d 为实数，求证 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$.

证法：（分析法）平方 → 应用柯西不等式 → 讨论：其几何意义？（构造三角形）

2. 教学三角不等式：

① 出示定理 3：设 $x_1,y_1,x_2,y_2\in R$，则 $\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}+\sqrt{x_2{}^2+y_2{}^2}\geq\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

分析其几何意义 → 如何利用柯西不等式证明

→ 变式：若 $x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3\in R$，则结合以上几何意义，可得到怎样的三角不等式？

3. 小结：二维柯西不等式的代数形式、向量形式；三角不等式的两种形式（两点、三点）

第二课时 3.1 二维形式的柯西不等式（二）

教学过程：

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$；$\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}+\sqrt{x_2{}^2+y_2{}^2}\geq\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

3. 如何利用二维柯西不等式求函数 $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}$ 的最大值?

要点：利用变式 $|ac+bd|\leq\sqrt{a^2+b^2}\bullet\sqrt{c^2+d^2}$.

二、讲授新课：

1. 教学最大（小）值：

① 出示例 1：求函数 $y=3\sqrt{x-1}+\sqrt{10-2x}$ 的最大值？

分析：如何变形？ → 构造柯西不等式的形式 → 板演

→ 变式：$y=\sqrt{3x-1}+\sqrt{10-2x}$ → 推广：$y=a\sqrt{bx+c}+d\sqrt{e-fx},(a,b,c,d,e,f\in R_+)$

② 练习：已知 $3x+2y=1$，求 x^2+y^2 的最小值.

解答要点：（凑配法）$x^2+y^2=\dfrac{1}{13}(x^2+y^2)(3^2+2^2)\geq\dfrac{1}{13}(3x+2y)^2=\dfrac{1}{13}$.

2. 教学不等式的证明：

① 出示例 2：若 $x,y\in R_+$，$x+y=2$，求证：$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq 2$.

分析：如何变形后利用柯西不等式？（注意对比 → 构造）

要点：$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}(x+y)(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})=\dfrac{1}{2}[(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2][(\dfrac{1}{\sqrt{x}})^2+(\dfrac{1}{\sqrt{y}})^2]\geq\ldots$

讨论：其它证法（利用基本不等式）

② 练习：已知 a 、$b\in R_{+}$，求证：$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geq 4$.

3. 练习：

① 已知 $x,y,a,b\in R^{+}$，且 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$，则 $x+y$ 的最小值.

要点：$x+y=(\frac{a}{x}+\frac{b}{y})(x+y)=\ldots.$ → 其它证法

② 若 $x,y,z\in R_{+}$，且 $x+y+z=1$，求 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值. （要点：利用三维柯西不等式）

变式：若 $x,y,z\in R_{+}$，且 $x+y+z=1$，求 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ 的最大值.

第三课时 3.2 一般形式的柯西不等式

2. 提问：二维形式的柯西不等式？如何将二维形式的柯西不等式拓广到三维？

答案：$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$；$(a^2+b^2+c^2)(d^2+e^2+f^2)\geq(ad+be+cf)^2$

二、讲授新课：

1. 教学一般形式的柯西不等式：

① 提问：由平面向量的柯西不等式$|\vec{\alpha}\bullet\vec{\beta}|\leq|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$，如果得到空间向量的柯西不等式及代数形式？

② 猜想：n 维向量的坐标？n 维向量的柯西不等式及代数形式？

结论：设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n\in R$，则

$$(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots a_n{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2++a_nb_n)^2$$

讨论：什么时候取等号？（当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时取等号，假设 $b_i\neq 0$）

联想：设 $B=a_1b_1+a_2b_2++a_nb_n$，$A=a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots a_n{}^2$，$C=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$，则有 $B^2-AC\geq 0$，可联想到一些什么？

③ 讨论：如何构造二次函数证明 n 维形式的柯西不等式？ （注意分类）

要点：令 $f(x)=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2+2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$，则

$f(x)=(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+\cdots+(a_nx+b_n)^2\geq 0$.

又 $a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2>0$，从而结合二次函数的图像可知，

$\Delta=\left[2(a_1b_1+a_2b_2++a_nb_n)\right]^2-4(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots a_n{}^2)\bullet(b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2)\leqslant 0$

即有要证明的结论成立. （注意：分析什么时候等号成立.）

④ 变式：$a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots a_n{}^2\geq\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$. （讨论如何证明）

2. 教学柯西不等式的应用：

① 出示例 1：已知 $3x+2y+z=1$，求 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值.

分析：如何变形后构造柯西不等式？ → 板演 → 变式：

② 练习：若 $x,y,z\in R_{+}$，且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$，求 $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}$ 的最小值.

③ 出示例 2：若 $a>b>c$，求证：$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geq\frac{4}{a-c}$.

要点：$(a-c)(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c})=[(a-b)+(b-c)](\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c})\geq(1+1)^2=4$

② 提出排序不等式（即排序原理）：

设有两个有序实数组: $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$; $b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_n$. $c_1,c_2,\cdots c_n$ 是 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的任一排列, 则有

$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ （同序和）

$\geq a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n$ （乱序和）

$\geq a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$ （反序和）

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 时，反序和等于同序和.

（要点：理解其思想，记住其形式）

2. 教学排序不等式的应用：

① 出示例 1：设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个互不相同的正整数，求证：

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \le a_1 + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{3^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^2}.$$

分析：如何构造有序排列？ 如何运用套用排序不等式？

证明过程：

设 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个排列，且 $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$，则 $b_1 \ge 1, b_2 \ge 2, \cdots, b_n \ge n$.

又 $1 > \frac{1}{2^2} > \frac{1}{3^2} > \cdots > \frac{1}{n^2}$，由排序不等式，得

$$a_1 + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{3^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^2} \ge b_1 + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{3^2} + \cdots + \frac{b_n}{n^2} \ge \ldots$$

小结：分析目标，构造有序排列.

② 练习：

已知 a, b, c 为正数，求证：$2(a^3 + b^3 + c^3) \ge a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b)$.

解答要点：由对称性，假设 $a \le b \le c$，则 $a^2 \le b^2 \le c^2$，

于是 $a^2 a + b^2 b + c^2 c \ge a^2 c + b^2 a + c^2 b$，$a^2 a + b^2 b + c^2 c \ge a^2 b + b^2 c + c^2 a$，

两式相加即得.