

姓名 _____ 座位号 _____
(在此卷上答题无效)

绝密 ★ 启用前

2022 年普通高等学校招生全国统一考试
数学(理科)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名和座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

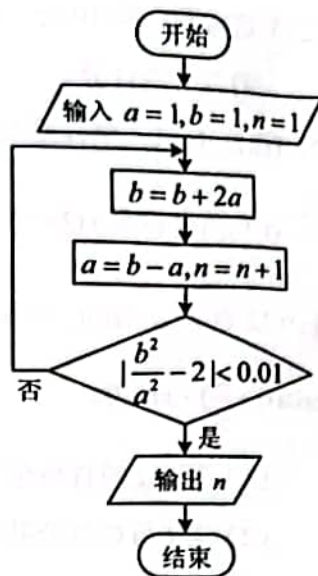
一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 M 满足 $\complement_U M = \{1, 3\}$, 则
A. $2 \in M$ B. $3 \in M$ C. $4 \notin M$ D. $5 \notin M$
2. 已知 $z = 1 - 2i$, 且 $z + a\bar{z} + b = 0$, 其中 a, b 为实数, 则
A. $a = 1, b = -2$ B. $a = -1, b = 2$
C. $a = 1, b = 2$ D. $a = -1, b = -2$
3. 已知向量 a, b 满足 $|a| = 1, |b| = \sqrt{3}, |a - 2b| = 3$, 则 $a \cdot b =$
A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
4. 嫦娥二号卫星在完成探月任务后,继续进行深空探测,成为我国第一颗环绕太阳飞行的人造行星。为研究嫦娥二号绕日周期与地球绕日周期的比值,用到数列 $\{b_n\}$:
$$b_1 = 1 + \frac{1}{\alpha_1}, b_2 = 1 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2}}, b_3 = 1 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3}}}, \dots$$
 依此类推,其中 $\alpha_k \in \mathbb{N}^* (k = 1, 2, \dots)$. 则
A. $b_1 < b_5$ B. $b_3 < b_8$ C. $b_6 < b_2$ D. $b_4 < b_7$
5. 设 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点,点 A 在 C 上,点 $B(3, 0)$, 若 $|AF| = |BF|$, 则 $|AB| =$
A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 3 D. $3\sqrt{2}$



6. 执行右边的程序框图, 输出的 $n =$

- A. 3
- B. 4
- C. 5
- D. 6



7. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为 AB, BC 的中点, 则

- A. 平面 $B_1EF \perp$ 平面 BDD_1
- B. 平面 $B_1EF \perp$ 平面 A_1BD
- C. 平面 $B_1EF \parallel$ 平面 A_1AC
- D. 平面 $B_1EF \parallel$ 平面 A_1C_1D

8. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项和为 168, $a_2 - a_3 = 42$, 则 $a_6 =$

- A. 14
- B. 12
- C. 6
- D. 3

9. 已知球 O 的半径为 1, 四棱锥的顶点为 O , 底面的四个顶点均在球 O 的球面上, 则当该四棱锥的体积最大时, 其高为

- A. $\frac{1}{3}$
- B. $\frac{1}{2}$
- C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 某棋手与甲、乙、丙三位棋手各比赛一盘, 各盘比赛结果相互独立. 已知该棋手与甲、乙、丙比赛获胜的概率分别为 p_1, p_2, p_3 , 且 $p_3 > p_2 > p_1 > 0$. 记该棋手连胜两盘的概率为 p , 则

- A. p 与该棋手和甲、乙、丙的比赛次序无关
- B. 该棋手在第二盘与甲比赛, p 最大
- C. 该棋手在第二盘与乙比赛, p 最大
- D. 该棋手在第二盘与丙比赛, p 最大



11. 双曲线 C 的两个焦点为 F_1, F_2 , 以 C 的实轴为直径的圆记为 D , 过 F_1 作 D 的切线与 C 交于 M, N 两点, 且 $\cos \angle F_1 N F_2 = \frac{3}{5}$, 则 C 的离心率为

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{17}}{2}$

12. 已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 且 $f(x) + g(2-x) = 5, g(x) - f(x-4) = 7$.

若 $y = g(x)$ 的图像关于直线 $x = 2$ 对称, $g(2) = 4$, 则 $\sum_{k=1}^{22} f(k) =$

- A. -21 B. -22 C. -23 D. -24

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 从甲、乙等 5 名同学中随机选 3 名参加社区服务工作, 则甲、乙都入选的概率为_____.

14. 过四点 $(0,0), (4,0), (-1,1), (4,2)$ 中的三点的圆的方程为_____.

15. 记函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的最小正周期为 T . 若 $f(T) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{\pi}{9}$ 为 $f(x)$ 的零点, 则 ω 的最小值为_____.

16. 已知 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 分别是函数 $f(x) = 2a^x - ex^2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的极小值点和极大值点. 若 $x_1 < x_2$, 则 a 的取值范围是_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin C \sin(A-B) = \sin B \sin(C-A)$.

(1) 证明: $2a^2 = b^2 + c^2$;

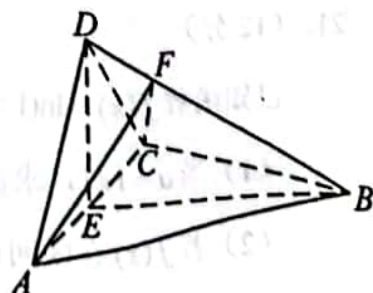
(2) 若 $a = 5, \cos A = \frac{25}{31}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. (12 分)

如图, 四面体 $ABCD$ 中, $AD \perp CD, AD = CD, \angle ADB = \angle BDC, E$ 为 AC 的中点.

(1) 证明: 平面 $BED \perp$ 平面 ACD ;

(2) 设 $AB = BD = 2, \angle ACB = 60^\circ$, 点 F 在 BD 上, 当 $\triangle AFC$ 的面积最小时, 求 CF 与平面 ABD 所成的角的正弦值.



19. (12分)

某地经过多年的环境治理,已将荒山改造成了绿水青山.为估计一林区某种树木的总材积量,随机选取了10棵这种树木,测量每棵树的根部横截面积(单位: m^2)和材积量(单位: m^3),得到如下数据:

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总和
根部横截面积 x_i	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.6
材积量 y_i	0.25	0.40	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.40	3.9

并计算得 $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 0.038$, $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 1.6158$, $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 0.2474$.

- 估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量;
- 求该林区这种树木的根部横截面积与材积量的样本相关系数(精确到0.01);
- 现测量了该林区所有这种树木的根部横截面积,并得到所有这种树木的根部横截面积总和为 186 m^2 . 已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比. 利用以上数据给出该林区这种树木的总材积量的估计值.

附: 相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$, $\sqrt{1.896} \approx 1.377$.

20. (12分)

已知椭圆 E 的中心为坐标原点, 对称轴为 x 轴、 y 轴, 且过 $A(0, -2)$, $B(\frac{3}{2}, -1)$ 两点.

- 求 E 的方程;
- 设过点 $P(1, -2)$ 的直线交 E 于 M , N 两点, 过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB 交于点 T , 点 H 满足 $\overline{MT} = \overline{TH}$. 证明: 直线 HN 过定点.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = \ln(1+x) + axe^{-x}$.

- 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
- 若 $f(x)$ 在区间 $(-1, 0)$, $(0, +\infty)$ 各恰有一个零点, 求 a 的取值范围.



(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4：坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos 2t, \\ y = 2 \sin t \end{cases}$ (t 为参数)，以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，已知直线 l 的极坐标方程为

$$\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) + m = 0.$$

- (1) 写出 l 的直角坐标方程；
- (2) 若 l 与 C 有公共点，求 m 的取值范围。

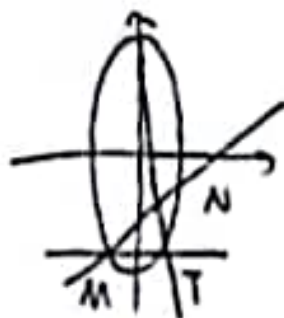
23. [选修 4-5：不等式选讲] (10 分)

已知 a, b, c 都是正数，且 $a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{1}{3}} = 1$ ，证明：

$$(1) abc \leq \frac{1}{9};$$

$$(2) \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{1}{2\sqrt{abc}}.$$

$$\frac{1}{4} \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$$



$$e^{-x} - xe^{-x}$$

