绝密★启用前

2022年普通高等学校招生全国统一考试

数　学

本试卷共5页，22题。全卷满分150分，考试用时120分钟。

★祝考试顺利★

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合$A=\{y|y=\log_2 x, x>\sqrt{2}\}$, $B=\left\{y|y=\left(\frac{1}{2}\right)^x, x<0\right\}$，则$A\cap B=$

A. $(1,+\infty)$　　B. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　C. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},1\right)$

2. 设$A(1,3)$, $B(-2,-3)$、$C(x,7)$，若$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{BC}$，则$x$的值为

A. 0　　B. 3　　C. 15　　D. 18

3. 沙漏是古代的一种计时装置，它由两个形状完全相同的容器和一个狭窄的连接管道组成，开始时细沙全部在上部容器中，利用细沙全部流到下部容器所需要的时间进行计时．某沙漏由上、下两个圆维组成，这两个圆锥的底面直径和高分别相等，细沙全部在上部时，其高度为圆锥高度h的$\frac{2}{3}$(细管长度忽略不计)．假设细沙全部漏入下部后，恰好堆成一个盖住沙漏底部的圆锥形沙堆．这个沙堆的高与圆锥的高h的比值为

A. $\frac{8}{27}$　　B. $\frac{4}{9}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

4. 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$\triangle ABC$的面积为S，且S与a，b，c满足等式$2S=(a+b)^2-c^2$，则$\tan C$的值为

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $-\frac{4}{3}$　　D. $-\frac{3}{4}$

5. 我国古代数学名著《九章算术》有“米谷粒分”题：粮仓开仓收粮，有人送来米 1534 石，验得米内夹谷，抽样取米一把，数得 254 粒内夹谷 28 粒，则这批米内夹谷约为

A. 134 石　　B. 169 石　　C. 338 石　　D. 1365 石

6. 若$\sin(\pi+\alpha)+\sin(-\alpha)=-m$，则$\sin(3\pi+\alpha)+2\sin(2\pi-\alpha)$可用$m$表示为

A. $-\dfrac{2}{3}m$　　B. $-\dfrac{3}{2}m$　　C. $\dfrac{2}{3}m$　　D. $\dfrac{3}{2}m$

7. 抛物线$y^2=2px$（$p>0$）的焦点为F，直线l过焦点F且斜率 2，与抛物线交于第一象限的A、B两点，$M(-\dfrac{p}{2},0)$，则$\tan\angle AMF=$

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$

8. 已知等比数列$\{a_n\}$和公差不为零的等差数列$\{b_n\}$都是无穷数列，当$n\in\mathrm{N}^*$时，则

A. 若数列$\{a_n\}$递增，则数列$\{na_n\}$递增　　B. 若数列$\{b_n\}$递增，则数列$\{nb_n\}$递增

C. 若数列$\{na_n\}$递增，则数列$\{a_n\}$递增　　D. 若数列$\{nb_n\}$递增，则数列$\{b_n\}$递增

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有错选的得 0 分。

9. 已知函数$f(x)=\sin x-|\cos x|$，则

A. $y=f(x)$的图象关于直线 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathrm{Z})$ 对称

B. $y=f(x)$的图象关于点$(k\pi,0)$（$k\in\mathrm{Z}$）对称

C. $f(x)$的值域为$[-\sqrt{2},1]$

D. $f(x)$在$[\pi,2\pi]$上单调递增

10. 在一试验中有事件A与B两个结果，则

A. 若$P(A)+P(B)=1$，则事件A与B是互为对立事件

B. 若$P(AB)=P(A)P(B)$，则事件A与B是相互独立事件

C. 若事件A与B也是互斥事件，则A与$\overline{B}$也是互斥事件

D. 若事件A与B是相互独立事件，则A与$\overline{B}$也是相互独立事件

11. 在平面直角坐标系中作$\triangle ABC$，$AB=AC=4$，点$B(-1,3)$，点$C(4,-2)$，$\triangle ABC$的外心、内心、重心三点共线且其所在直线与圆M：$(x-3)^2+y^2=r^2$相切，则

A. 圆M上点到直线$x-y+3=0$最小距离为$2\sqrt{2}$

B. 圆M上点到直线$x-y+3=0$最大距离为$3\sqrt{2}$

C. 若点(x,y)在圆M上，则$x+\sqrt{3}y$的最小值是$3-2\sqrt{2}$

D. 圆$(x-a-1)^2+(y-a)^2=8$与M有公共点，则a的取值范围是$[1-2\sqrt{2},1+2\sqrt{2}]$

12. 欧拉在1748年发现了自然对数的底数、虚数单位存在以下关系：

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta.$$

后人称其为欧拉公式，我们把 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$称为复数的三角形式，其中从$x$轴的正半轴到向量$\overrightarrow{OZ}$的角$\theta$叫做复数$z=a+bi$（$a$，$b\in R$）的辐角，把向量$\overrightarrow{OZ}$的长度$r$叫做复数的模．我们可以简化复数乘法：

若复数

$$z_1=r_1e^{i\theta_1}=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\ z_2=r_2e^{i\theta_2}=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$

则

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)).$$

A. 若$z=\cos\theta+i\sin\theta$，则有$e^{\pi i}+1=0$

B. 若$r=1$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，则$z^3=1$

C. 若$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

D. 设$z=(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}})^{2021}$，则$z$在复平面上对应的点在第一象限

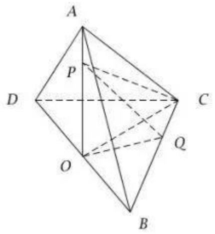
三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知函数$f(x)=x^3+x$，且$f(3a-2)+f(a-1)<0$，则实数a的取值范围为________.

14. 已知双曲线$x^2-\dfrac{y^2}{m}=1(m>0)$的离心率是2，则$m$的值为________；以该双曲线的右焦点为圆心且与其渐近线相切的圆的方程为________.

15. 不等式$4^x-3\cdot2^x-4>0$的解集为________.

16. 如图，在三棱锥中$A-BCD$，$BC=DC=AB=AD=\sqrt{2}$，$BD=2$，平面$ABD\perp$平面BCD，O为BD中点，点P，Q分别为线段AO，BC上的动点（不含端点），且$AP=CQ$，则三棱锥$P-QCO$体积的最大值为________.



四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （10分）

已知数列$\{a_n\}$是各项均为正数的等差数列，其中$a_1=1$，且a_2，a_4，a_6+2成等比数列；数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n，满足$2S_n+b_n=1$.

（1）求数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式；

（2）如果$c_n=a_nb_n$，设数列$\{c_n\}$的前n项和为T_n，是否存在正整数n，使得$T_n>S_n$成立？若存在，求出n的最小值；若不存在，说明理由.

18. （12分）

在①a，b，c为连续自然数，②$c=3a$，③$C=2A$三个条件中根据题目要求任意选择两个，补充在下面的问题中，并解答.

问题：是否存在$\triangle ABC$，它的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，其中$a<b<c$，且________，________？

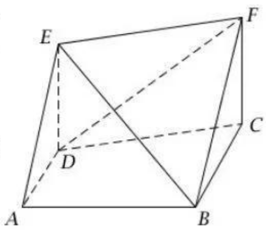
（1）选择使得$\triangle ABC$不存在的两个条件，并说明理由；

（2）选择使得$\triangle ABC$存在的两个条件，并求a的值.

注：如果分别选择多组条件解答，按第一组解答计分。

19. （12分）

如图，直角梯形$ABCD$中，$AD//BC$，$AD\perp AB$，$AB=BC=2AD=2$，四边形$EDCF$为矩形，$CF=\sqrt{3}$，平面$EDCF\perp$平面$ABCD$.



（1）求证：$DF//$平面ABE；

（2）在线段DF上是否存在点P，使得直线BP与平面ABE所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$？若存在，求出线段BP的长，若不存在，请说明理由.

20. （12分）

以椭圆C：$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的中心$O$为圆心，以$\sqrt{\dfrac{ab}{2}}$为半径的圆称为该椭圆的“伴随”，已知椭圆的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且过点$(\dfrac{1}{2},\sqrt{3})$.

（1）求椭圆C及其“伴随”的方程；

（2）过点$P(0,m)$作“伴随”的切线l交椭圆C于A，B两点，记$\triangle AOB$（O为坐标原点）的面积为$S_{\triangle AOB}$，将$S_{\triangle AOB}$表示为m的函数，并求$S_{\triangle AOB}$的最大值.

21. （12分）

已知函数$f(x)=\ln|x|-x^2+ax$，其中a为实数.

（1）当$a=1$时，求函数$f(x)$的单调增区间；

（2）函数$y=f(x)$图象上是否存在点$P(x_0,y_0)$，使得函数$y=f(x)$在点P处的切线l上的任一点都不在函数 $y=f(x)$图象的下方？若存在，求x_0的取值范围的集合；若不存在，试说明理由.

22. （12分）

为了解新冠肺炎的相关特征，在疫情爆发之初，研究人员从某省随机抽取 100 名确诊患者，统计他们的年龄数据，得下面的频数分布表.

年龄	[10,20]	(20,30]	(30,40]	(40,50]	(50,60]	(60,70]	(70,80]	(80,90]	(90,100]
人数	2	6	12	18	22	22	12	4	2

由频数分布表可以大致认为，该省新冠肺炎患者的年龄Z服从正态分布$N(\mu,15.2^2)$，其中μ近似为这 100 名患者年龄的样本平均数，同一组中的数据用该组区间的中点值作代表. 流行病学调查中可用密切接触者确诊的频率代替 1 名密切接触者确诊发生的概率，每名密切接触者是否确诊相互独立.

为检测出所有患者，设计了如下方案：①将密切接触者随机地按每组n（$1<n<20$）的方式平均分组，②将同组的n个人每人抽取的一半血液混合在一起化验，③若发现新冠病毒，则对该组的n个人抽取的另一半血液逐一化验. 记n个人中患者的人数为X_n，以化验次数的期望值为决策依据，由计算得，若$Z\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$P(\mu-\sigma<Z<\mu+\sigma)=0.6826$，$P(\mu-2\sigma<Z<\mu+2\sigma)=0.9544$，$P(\mu-3\sigma<Z<\mu+3\sigma)=0.9973$.

（1）请估计该省新冠肺炎患者年龄在 70 岁及以上患者比例.

（2）若该省新冠肺炎的密切接触者（均已接受检测）中确诊患者约占 10%. 现有密切接触者 20 人. 试确定使得这 20 人的化验总次数最少的n的值.

附：参考数据$0.9^4\approx0.66$，$0.9^5\approx0.59$，$0.9^{10}\approx0.35$.