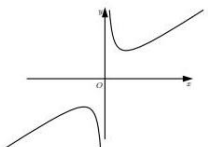
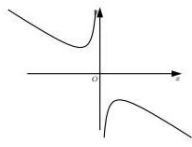


专题1、对勾函数

【要点分析】

- 定义:形如 $f(x)=ax+\frac{b}{x}$, ($ab>0$) 的函数称为对勾函数,又称“双勾函数”.
- 图像:是一种类似于反比例函数的一般双曲函数.
- 性质:

	$a > 0, b > 0$	$a < 0, b < 0$
图像		
定义域	$\{x x \neq 0\}$;	$\{x x \neq 0\}$;
值域	$\{y y \geq 2\sqrt{ab}, y \leq -2\sqrt{ab}\}$;	$\{y y \geq 2\sqrt{ab}, y \leq -2\sqrt{ab}\}$;
渐近线	直线 $y = ax$, 直线 $x = 0$;	直线 $y = ax$, 直线 $x = 0$;
对称性	奇函数, 对称中心 $(0,0)$;	奇函数, 对称中心 $(0,0)$;
单调性	递增区间 $(-\infty, -\sqrt{\frac{b}{a}})$ 和 $(\sqrt{\frac{b}{a}}, +\infty)$; 递减区间 $(-\sqrt{\frac{b}{a}}, 0)$ 和 $(0, \sqrt{\frac{b}{a}})$;	递增区间 $(-\sqrt{\frac{b}{a}}, 0)$ 和 $(0, \sqrt{\frac{b}{a}})$; 递减区间 $(-\infty, -\sqrt{\frac{b}{a}})$ 和 $(\sqrt{\frac{b}{a}}, +\infty)$;

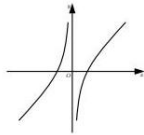
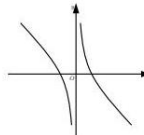
- 变式:有些看起来不能用对勾函数,实际上变形后也可以用,比如如下:

$$f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x+m} \ (a \neq 0); \ f(x) = \frac{x+m}{ax^2+bx+c} \ (a \neq 0); \ f(x) = \frac{x+b}{\sqrt{x+a}}; \ f(x) = \frac{x^2+b}{\sqrt{x^2+a}} \ (a > 0).$$

专题2、飘带函数

【要点分析】

- 定义:形如 $f(x)=ax+\frac{b}{x}$, ($ab<0$) 的函数称为“飘带函数”.
- 图像:是一种双曲函数.
- 性质:

	$a > 0, b < 0$	$a < 0, b > 0$
图像		
定义域	$\{x x \neq 0\}$;	$\{x x \neq 0\}$;
值域	R ;	R ;
渐近线	直线 $y = ax$, 直线 $x = 0$;	直线 $y = ax$, 直线 $x = 0$;
对称性	奇函数, 对称中心 $(0,0)$;	奇函数, 对称中心 $(0,0)$;
单调性	递增区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$; 无递减区间;	递减区间 $(-\infty, -0)$ 和 $(0, +\infty)$; 无递增区间;

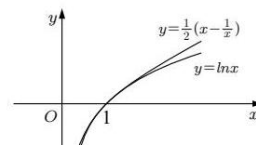
- 变式:有些看起来不能用飘带函数,实际上变形后也可以用,比如如下:

$$f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x+m} \ (a \neq 0); \ f(x) = \frac{x+m}{ax^2+bx+c} \ (a \neq 0); \ f(x) = \frac{x+b}{\sqrt{x+a}}; \ f(x) = \frac{x^2+b}{\sqrt{x^2+a}} \ (a > 0).$$

- 重要放缩不等式:

当 $x \in (0,1)$ 时, $\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x}) < \ln x$.

当 $x \in (1,+\infty)$ 时, $\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x}) > \ln x$.



专题3、一次型分式函数

【要点分析】

1. 定义:形如函数 $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ ($c\neq 0, ad\neq bc$) 称为一次型分式函数;
2. 图像:本质是反比例函数平移,也是双曲线;有垂直渐近线、水平渐近线,对称中心 $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$;
3. 性质:

图像		
定义域	$\{x \mid x \neq -\frac{d}{c}\};$	$\{x \mid x \neq -\frac{d}{c}\};$
值域	$\{y \mid y \neq \frac{a}{c}\};$	$\{y \mid y \neq \frac{a}{c}\};$
渐近线	直线 $x = -\frac{d}{c}, y = \frac{a}{c}$,	直线 $x = -\frac{d}{c}, y = \frac{a}{c}$,
对称性	对称中心 $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$,	对称中心 $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$,
单调性	递减区间 $(-\infty, -\frac{d}{c})$ 和 $(-\frac{d}{c}, +\infty)$	递增区间 $(-\infty, -\frac{d}{c})$ 和 $(-\frac{d}{c}, +\infty)$

备注:作图要点:一作竖线,二作水平线,三取特殊点 $(0, \frac{b}{d})$,四画图可得.

专题5、单绝对值型函数

【要点分析】

1. 定义:形如 $f(x)=a|x-h|+k$ 的函数,叫做绝对值函数;
2. 图象:“V”字型图像;
3. 性质:

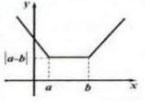
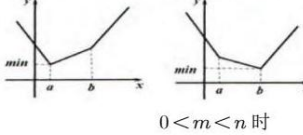
	$a > 0$	$a < 0$
图像		
定义域	R	R
值域	$\{y \mid y \geq k\}$	$\{y \mid y \leq k\}$
对称性	对称轴 $x = h$	对称轴 $x = h$
单调性	递减区间 $(-\infty, h)$, 递区间 $(h, +\infty)$	递增区间 $(-\infty, h)$, 递减区间 $(h, +\infty)$

备注:开口、顶点、对称轴类比函数 $f(x)=a(x-h)^2+k$.

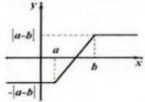
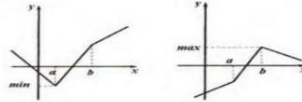
专题6、双绝对值型函数

【要点分析】

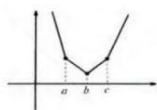
1. 双绝对值和

	$f(x) = x-a + x-b $	$f(x) = m x-a + n x-b (m, n > 0)$
图像		
特点	平底锅型 在 $[a, b]$ 上取得最小值	尖底型 在系数较大处的绝对值为 0 时取得最小值

2. 双绝对值差

	$f(x) = x-a - x-b $	$f(x) = m x-a - n x-b (m, n > 0)$
图像		
特点	“Z” 字型 在 $x \leq a, x \geq b$ 上取得最值	尖底型 减号不看, 只看 m, n , 在系数较大处的绝对值为 0 时取得最值

备注:若是 $f(x) = -|x-a| + |x-b|$, $f(x) = -m|x-a| + n|x-b| (m, n > 0)$, 只是如上双绝对值差的相反情况, 分析省略.



补充:三绝对值函数: $f(x) = |x-a| + |x-b| + |x-c|$ (其中 $a < b < c$),

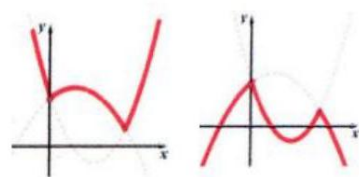
图像尖底锅型, 且在三个绝对值零点的中间值处取最小值.

专题7、max、min 函数1(单元问题)

【要点分析】

1. 定义: 如 $y = \max\{f(x), g(x)\}$, $y = \min\{f(x), g(x)\}$, 称为最大值函数、最小值函数;

2. 图像: $y = \max\{f(x), g(x)\}$ 是保留两者最高的图象, 最后得到最大值函数的图象; $y = \min\{f(x), g(x)\}$ 是保留两者最低的图象, 最后得到最小值函数的图象;



3. 性质: $\max\{f_1, f_2, f_3\} \geq \frac{a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3}{a_1 + a_2 + a_3} \geq \min\{f_1, f_2, f_3\}$, 其中 $a_1, a_2, a_3 > 0$. (加权不等式)

4. 方法:

如求最大值函数的最小值, 一般有两种:

(1) 代数方法, 通过比较大小, 得到在定义域内不同区间的函数值最大的函数, 由此得到一个分段函数, 求此分段函数各段的最小值, 比较这些最小值, 取其最小者作为最大值函数的最小值;

(2) 几何方法, 在同一坐标系内画出各函数图象, 比较图象的高低位置, 保留最高的图象, 最后得到最大值函数的图象, 观察此图象的最低点的纵坐标, 得到最大值函数的最小值.

专题9、几个特殊函数1

【要点分析】

1. 取整函数: $y = [x]$, 表示不超过 x 的最大整数. 性质:

① 定义域: R ;

② 值域: $y \in Z$;

③ 图象: 台阶型线段;

2. 小数函数: $y = \{x\}$, 表示 x 的小数部分.

性质:

① 定义域: R ;

② 值域: $[0, 1)$;

③ 周期性: $T = 1$;

备注:

① $x = [x] + \{x\}$;

② $x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1$;

③ $[-x] = \begin{cases} -[x] - 1, & x \notin Z \\ -[x], & x \in Z \end{cases}$;

④ $\forall x, y \in R$, 有 $[x] + [y] \leq [x + y]$.

3. 常见双曲函数:
$$\begin{cases} \text{双曲正弦函数: } \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \text{双曲余弦函数: } \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \text{双曲正切函数: } \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{cases}$$

(1) 性质: 基础性质如图:

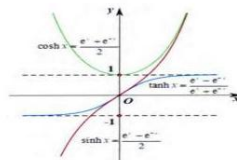
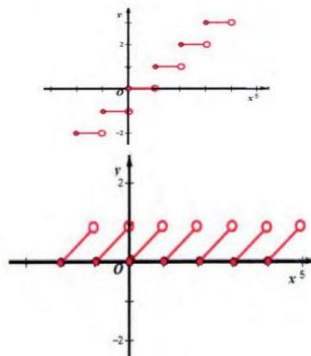
(2) 备注: 关系: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

另, 有类似三角函数的两角和差性质:

① $\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y)$;

② $\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$;

③ $\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh(x) \pm \tanh(y)}{1 \pm \tanh(x)\tanh(y)}$.



专题10、几个特殊函数2

【要点分析】

4. 符号函数: $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

性质:

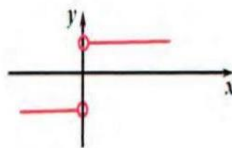
① 定义域: R ;

② 值域: $\{-1, 0, 1\}$;

③ 奇函数;

④ 非单调函数;

⑤ 周期性: 非周期函数.



5. 狄利克雷函数: $D(x) = \begin{cases} 1, & x = \text{有理数} \\ 0, & x = \text{无理数} \end{cases}$

(1) 性质:

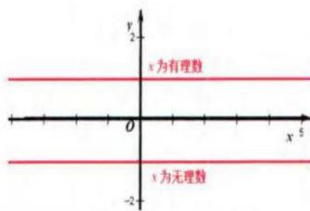
① 定义域: R ;

② 值域: $\{0, 1\}$;

③ 偶函数;

④ 非单调函数;

⑤ 周期性: 周期函数, 但没有最小正周期.



(2) 备注:

① 上图只是狄利克雷函数示意图, 其图像其实是无法画出的 (不能画两条直线);

② 但是它的函数图像客观存在, 并以 y 轴为对称轴 (即偶函数);

③ 它处处不连续, 处处极限不存在;

④ 狄利克雷函数还是一个周期函数, 但是却没有最小正周期,

它的周期是任意负有理数和正有理数.

6. 狄利克雷函数: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} (p, q \text{ 互素}, p < q) \\ 0, & x = 0, 1 \text{ 及 } (0, 1) \text{ 中的无理数} \end{cases}$ (1) 性质:

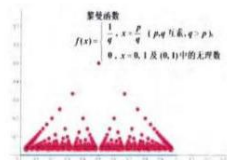
① 定义域: $[0, 1]$;

② 值域: $\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$;

③ 关于 $x = \frac{1}{2}$ 对称.

(2) 备注:

① 从黎曼函数的图像中可以看出, 函数值比较大的点是很稀疏的, 随着函数值的减小, 点在横向和纵向上都



变得越来越密集. 根据图像的特点, 黎曼函数有时也被称为爆米花函数、雨滴函数.

* ② 黎曼函数上的所有无理点处处连续, 有理点处处不连续.